

ADRAN MATHEMATEG / DEPARTMENT OF MATHEMATICS

ARHOLIADAU SEMESTER 2 / SEMESTER 2 EXAMINATIONS

MAI / MAY 2020

MT21510 - Dadansoddiad Cymhlyg

Mae'r cwestiynau ar y papur hwn wedi cael eu hysgrifennu yn y Gymraeg.

Os oes gennych unrhyw gwestiwn am y papur yn ystod yr arholiad, cysylltwch â chyd-gysylltydd y modiwl, Dr Adil Mughal, ar aqm@aber.ac.uk.

Dylech ysgrifennu eich datrysiadau ac yna uwchlwytho copi ohonynt i blackboard fel un ffeil PDF.

Amser a ganiateir - 3 awr

Mae'n rhaid cyflwyno eich atebion erbyn 12:30 (amser y DU).

- Gellir rhoi cynnig ar bob cwestiwn.
- Rhoddir mwy o ystyriaeth i berfformiad yn rhan B wrth bennu marc dosbarth cyntaf.
- Mae modd i fyfyrwyr gyflwyno atebion i'r papur hwn naill ai yn y Gymraeg neu'r Saesneg.

Time allowed - 3 hours

Submission must be completed by 12:30 (UK time).

- All questions may be attempted.
- Performance in section B will be given greater consideration in assigning a first class mark.
- Students may submit answers to this paper in either Welsh or English.

Rhan A

1. Brasluniwch y cyfran o'r plân cymhlyg sy'n cyfateb i'r anhafaleddau canlynol.
 - (a) $Re(z + 1) \geq 0$,
 - (b) $|z - 1 + i| \leq 2$,
 - (c) $|z - 1| \leq |z + 1|$. [3+3+4=10 marc]

2. Darganfyddwch yr holl rifau cymhlyg sy'n bodloni $z^4 = -16$, gan eu rhoi yn y ffurf $z = x + iy$ gyda $x, y \in \mathbb{R}$. [8 marc]

3. (a) Rhewch fformiwla Euler ar gyfer y ffwythiant esbonyddol cymhlyg, \exp . [2 farc]
 - (b) Mynegwch $\cos(i)$ yn y ffurf $x + iy$ gydag x ac y yn real. [2 farc]
 - (c) Lluniwch ddelwedd yr is-setiau canlynol o'r plân cymhlyg o dan y mapiad esbonyddol \exp :
 - (i) $\{z \in \mathbb{C} : Re(z) = \frac{\pi}{4}\}$,
 - (ii) $\{z \in \mathbb{C} : Im(z) = \frac{\pi}{4}\}$,
 - (iii) $\{z \in \mathbb{C} : Im(z) > 0\}$.[6 marc]

4. (a) Darganfyddwch y rhannau real a dychmygol o'r ffwythiant $f(z) = (z + 1)^2$.
 - (b) Nodwch yr hafaliadau Cauchy-Riemann a gwiriwch hwy ar gyfer rhannau real a dychmygol $f(z) = (z + 1)^2$.
 - (c) Beth yw eich casgliad am f wedi i chi wirio'r hafaliadau Cauchy-Riemann? [3+4+1=8 marc]

5. (a) Nodwch y diffiniad o ffwythiant harmonig. [2 farc]
 - (b) Gwiriwch fod $u(x, y) = x^3 + 3x^2y - 3xy^2 - y^3$ yn harmonig. [4 marc]
 - (c) Darganfyddwch ffwythiant harmonig arall $v(x, y)$ fel bod $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ yn ddadansoddol. [6 marc]

6. (a) Rhewch fformiwla integrol Cauchy.
 - (b) Os mai C yw'r cyfuchlin cylchol $|z| = 2$, defnyddiwch fformiwla integrol Cauchy er mwyn enrhifo

$$\oint \frac{e^{\pi z}}{(z + i)} dz.$$
[3+7=10 marc]

7. (a) Rhewch ddiffiniad o'r brif gangen Log o'r logarithm ac o $z^{\frac{1}{4}}$, y pedwerydd isradd.
 - (b) Enrhifwch y penrhifau $Log(1 + i)$ a $(-1 + i\sqrt{3})^{\frac{1}{4}}$ (yn y ffurf $x + iy$ gydag x, y yn real).
 - (c) Lluniwch y ddelwedd o $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ o dan y mapiadau Log a $z^{\frac{1}{4}}$. [5+5+2=12 marc]

Rhan B

8. Enrhifwch yr integrynnau canlynol,

(a)

$$\int_{C_1} |z|^2 dz$$

lle mae C_1 yn dynodi'r segment llinell syth o -1 hyd at $3i$,

(b)

$$\int_{C_2} \sin z dz$$

lle rhoddir C_2 gan y paramedriad $\gamma : [0, \frac{\pi}{2}] \ni t \mapsto \frac{1}{2}t + i \cos(5t)$.

[7+8=15 marc]

9. Cyfrifwch yn echblyg y gyfres Laurent o gwmpas $z = 0$ ar gyfer y ffwythiant

$$f(z) = \frac{1}{z^2(z+5)}.$$

[8 marc]

10. Gadewch i z_0 fod yn begwn trefn 2 ar gyfer ffwythiant f y gellir ei ysgrifennu gan gyfres Laurent o gwmpas z_0 . Profwch y ceir y gweddill gan y fformiwla ganlynol.

$$\text{res}_f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d}{dz} [(z - z_0)^2 f(z)]$$

Gellir cymryd pob ffaith berthnasol sy'n cysylltu pegynnau a'u gweddillion i'r gyfres Laurent fel rhai sy'n hysbys ond dylech eu nodi yn glir yn eich prawf. [10 marc]

11. Defnyddiwch y Theorem Gweddill er mwyn enrhifo'r integrynnau canlynol,

(a)

$$\oint_{|z-2|=1} \frac{\log(z)}{z^3 - 4z^2 + 4z} dz,$$

(b)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx,$$

(c)

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2i + \cos(x)} dx.$$

[6+5+6=17 marc]