

ADRAN MATHEMATEG / DEPARTMENT OF MATHEMATICS

ARHOLIADAU SEMESTER 2 / SEMESTER 2 EXAMINATIONS

MAI / MAY 2020

MT25220 - Cyflwyniad i Ddadansoddiad Rhifiadol a'i Gymwysiadau

Mae'r cwestiynau ar y papur hwn wedi cael eu hysgrifennu yn Gymraeg.

Os oes gennych unrhyw gwestiwn am y papur yn ystod yr arholiad, cysylltwch â chyd-gysylltydd y modiwl, Dr Tudur Davies, ar itd@aber.ac.uk.

Dylech ysgrifennu eich datrysiadau ac yna uwchlwytho copi ohonynt i blackboard fel un ffeil PDF.

Amser a ganiateir - 3 awr

Mae'n rhaid cyflwyno eich atebion erbyn 12:30 (amser y DU).

- Gellir rhoi cynnig ar bob cwestiwn.
- Rhoddir mwy o ystyriaeth i berfformiad yn rhan B wrth bennu marc dosbarth cyntaf.
- Mae modd i fyfyrwyr gyflwyno atebion i'r papur hwn naill ai yn y Gymraeg neu'r Saesneg.

Time allowed - 3 hours

Submission must be completed by 12:30 (UK time).

- All questions may be attempted.
- Performance in section B will be given greater consideration in assigning a first class mark.
- Students may submit answers to this paper in either Welsh or English.

Rhan A

1. Ar gyfer y data canlynol:

i	0	1	2
x_i	-1	0	1
$f(x_i)$	1	3	0

(a) Cyfrifwch y rhyngosodiad llinol fesul rhan Lagrange. [5 marc]

(b) Cyfrifwch y polynomial rhyngosod cwadratig Lagrange. [5 marc]

2. (a) Cyfrifwch y tabl gwahaniaeth ymlaen ar gyfer y data canlynol:

x	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$f(x)$	1.00	0.62	0.28	-0.02	-0.28	-0.5

[6 marc]

(b) Beth yw'r polynomial gradd lleiaf sy'n cydweddu'r data yn union? [1 marc]

(c) Darganfyddwch y polynomial rhyngosod yma gan ddefnyddio'r fformiwla gwahaniaeth ymlaen

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n \binom{r}{i} \Delta^i f(x_0)$$

Ile mae $r = (x - x_0)/h$. [5 marc]

3. Cofiwch mai'r fformiwla ar gyfer cyfeiliornad y dull Trapesoidaidd cyfansawdd o amcangyfrif

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx$$

gan ddefnyddio n is-gyfwng â lled $h = (b - a)/n$ yw

$$E_{T_n} = -\frac{(b-a)}{12} h^2 f''(\xi)$$

ar gyfer rhyw $\xi \in [a, b]$.

Darganfyddwch y nifer o is-gyfyngau sydd eu hangen fel bod y dull Trapesoidaidd cyfansawdd yn amcangyfrif yr integryn

$$I(f) = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}$$

yn gywir i chwe lle degol.

(Nid oes angen i chi gyfrifo amcangyfrif rhifiadol o'r integryn.) [8 marc]

4. Rhoddir y rheol Simpson ar gyfer amcangyfrif yr integryn $\int_a^b f(x)dx$ gan

$$S_2 = \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)],$$

lle mae $x_0 = a$, $x_1 = (a + b)/2$, $x_2 = b$ a $h = (b - a)/2$.

- (a) Trwy rannu'r cyfwng $[a, b]$ i $2N$ is-gyfwng o'r un hyd, deilliwch y rheol Simpson cyfansawdd. [5 marc]
 (b) Rhoddir y ffwythiant $f(x)$ gan y tabl o werthoedd isod.

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	2	7	12	10	5

Defnyddiwch y rheol Simpson er mwyn amcangyfrif yr integryn $\int_0^4 f(x)dx$ gyda

- (i) $n = 2$ is-gyfwng;
 (ii) $n = 4$ is-gyfwng.

[6 marc]

5. (a) Dangoswch fod y ffwythiant

$$g(x) = \sqrt[4]{x + 10}$$

yn fapiad cyfangiad ar $[0, 6]$.

[6 marc]

- (b) Defnyddiwch y ffwythiant $g(x)$ o rhan (a) gyda phwynt cychwynnol addas er mwyn cyfrifo isradd yr hafaliad

$$x^4 - x - 10 = 0$$

yn gywir i dri lle degol.

[4 marc]

6. (a) Dangoswch fod gan yr hafaliad

$$2x^2 + 5 = e^x$$

isradd yn y cyfwng $[3, 4]$.

[3 marc]

- (b) Defnyddiwch iteru Newton-Raphson er mwyn darganfod yr isradd hwn yn gywir i bum lle degol. [6 marc]

7. (a) Dangoswch fod gan y broblem gwerth cychwynnol

$$y' = y - 1, \quad y(0) = 1/4,$$

ddatrysiaid unigryw ar gyfer $0 \leq x \leq 1$.

[4 marc]

- (b) Datrysych y broblem gwerth cychwynnol o rhan (a) gan ddefnyddio dull Euler gyda champau â maint $h = 1/4$. [6 marc]

Rhan B

8. Cyfrifwch y sblein giwbig naturiol $s(x)$ sy'n rhyngosod y data canlynol:

i	0	1	2
x_i	0	2	4
$f(x_i)$	3	0	2

[14 marc]

9. (a) Darganfyddwch y pwysynnau ω_0 , ω_1 a ω_2 fel bod y rheol integru

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \approx \omega_0 f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \omega_1 f(0) + \omega_2 f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$$

yn union gywir ar gyfer polynomialau gradd 2 neu lai.

[8 marc]

(b) Defnyddiwch y rheol er mwyn amcangyfrif

$$I(f) = \int_0^2 te^{2t} dt.$$

[4 marc]

10. (a) Darganfyddwch hafaliad gwadratig sy'n gysylltiedig â'r dull iterus

$$x_{n+1} = \frac{bx_n^2 + 2cx_n}{c - ax_n^2}.$$

[3 marc]

(b) Os yw $c \neq 0$ ac $ax^2 \neq c$ ar gyfer rhyw isradd x^* , yna dangoswch fod y dull yn un trefn dau yn union.

[7 marc]

11. Ystyriwch y broblem gwerth cychwynnol

$$y' = -y + x + 1, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad y(0) = 1.$$

(a) Defnyddiwch y dull Runge-Kutta syml

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} [f(x_n, y_n) + f(x_n + h, y_n + hf(x_n, y_n))]$$

er mwyn datrys y broblem gwerth cychwynnol yma gyda $h = 0.5$.

[4 marc]

(b) Dangoswch fod y dull Runge-Kutta syml yn gyson gyda'r broblem gwerth cychwynnol.

[3 marc]

(c) Pa gyfyngiad ar h sydd ei angen, os o gwbl, i sicrhau fod y dull Runge-Kutta yn gyfan gwbl sefydlog?

[7 marc]