

ADRAN MATHEMATEG / DEPARTMENT OF MATHEMATICS

ARHOLIADAU SEMESTER 2 / SEMESTER 2 EXAMINATIONS

MAI / MAY 2020

MT25610 - Hydrodynameg I

Mae'r cwestiynau ar y papur hwn wedi cael eu hysgrifennu yn Gymraeg.

Os oes gennych unrhyw gwestiwn am y papur yn ystod yr arholiad, cysylltwch â chyd-gysylltydd y modiwl, yr Athro Simon Cox, ar shc@aber.ac.uk.

Dylech ysgrifennu eich datrysiadau ac yna uwchlwytho copi ohonynt i blackboard fel un ffeil PDF.

Amser a ganiateir - 3 awr

Maen rhaid cyflwyno eich atebion erbyn 12:30yp (amser y DU).

Time allowed - 3 hours

Submission must be completed by 12:30pm (UK time).

- Gellir rhoi cynnig ar bob cwestiwn.
- Rhoddir mwy o ystyriaeth i berfformiad yn rhan B wrth bennu marc dosbarth cyntaf.
- Mae modd i fyfyrwyr gyflwyno atebion i'r papur hwn naill ai yn Gymraeg neu'r Saesneg.
- All questions may be attempted.
- Performance in section B will be given greater consideration in assigning a first class mark.
- Students may submit answers to this paper in either Welsh or English.

Fformiwlâu Defnyddiol

Yn y nodiant arferol:

$$\underline{\nabla}\phi = \frac{1}{h_1} \frac{\partial\phi}{\partial x_1} \underline{e}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial\phi}{\partial x_2} \underline{e}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial\phi}{\partial x_3} \underline{e}_3$$

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{u} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left(\frac{\partial(h_2 h_3 u_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(h_1 h_3 u_2)}{\partial x_2} + \frac{\partial(h_1 h_2 u_3)}{\partial x_3} \right)$$

$$\underline{\nabla} \wedge \underline{u} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \underline{e}_1 & h_2 \underline{e}_2 & h_3 \underline{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ h_1 u_1 & h_2 u_2 & h_3 u_3 \end{vmatrix}$$

$$\underline{\nabla}^2 \phi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial\phi}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial\phi}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial\phi}{\partial x_3} \right) \right)$$

Rhan A

1. Darganfyddwch y llinlwybrau ar gyfer y meysydd cyflymder canlynol sydd wedi'u rhoi mewn cyfesurynnau Cartesaidd a pegynlinol plân, gyda λ yn gysonyn positif. Ymhob achos brasluniwch y llinlwybrau ar echelinau Cartesaidd.

(a) $\underline{u} = \lambda x \underline{e}_x - \lambda y \underline{e}_y$, [6 marc]

(b) $\underline{u} = \lambda y \underline{e}_x$, [6 marc]

(c) $\underline{u} = \lambda r \underline{e}_\theta$. [6 marc]

2. (a) Rhowch fynegiad ar gyfer deilliad darfudol y maes fector \underline{u} . [3 marc]
 (b) Cyfrifwch ddeilliad darfudol y maes cyflymder

$$\underline{u} = 3xt \underline{e}_x - 3yzt \underline{e}_y + z \underline{e}_z.$$

[6 marc]

3. (a) Rhoddir forteisedd llif llifydd gan $\underline{\omega} = \nabla \wedge \underline{u}$. Cyfrifwch y forteisedd ar gyfer y llifau llifydd canlynol:

(i) $\underline{u} = x \underline{e}_x - y \underline{e}_y$, [3 marc]

(ii) $\underline{u} = x \underline{e}_y$, [3 marc]

(iii) $\underline{u} = \frac{a}{r} \underline{e}_r$, [3 marc]

(iv) $\underline{u} = ar \underline{e}_\theta$, [3 marc]

Ile mae a yn gysonyn positif.

- (b) Nodwch pa rai o'r llifau, os o gwbl, sy'n anghylchdro. [2 marc]

4. Darganfyddwch os yw'r llifau canlynol yn rhai addas neu anaddas ar gyfer llifyddion anghywasg:

(a) $\underline{u} = x \underline{e}_x - y \underline{e}_y$, [3 marc]

(b) $\underline{u} = \frac{a}{r} \underline{e}_r$, [3 marc]

Ile mae a yn gysonyn positif.

5. Oes yna ffwythiant llif ψ yn bodoli ar gyfer pob un o'r meysydd fector canlynol? Naill ai rhowch reswm pam nad oes ffwythiant llif yn bodoli neu rhowch y ffwythiant llif addas.

(a) $\underline{u} = \Omega y \underline{e}_x - \Omega x \underline{e}_y$ [3 marc]

(b) $\underline{u} = \Omega x \underline{e}_x + \Omega y \underline{e}_y$ [3 marc]

(c) $\underline{u} = \frac{\Omega}{r^2} \underline{e}_\theta$, [3 marc]

Ile mae Ω yn gysonyn positif.

6. Mae gan lif dau ddimensiwn o lifydd y potensial cyflymder canlynol:

$$\phi(x, y) = 3e^{5x} \sin(5y).$$

(a) Darganfyddwch y maes cyflymder. [4 marc]

(b) Dangoswch fod ϕ yn harmonig. [3 marc]

7. Mae Prydwen Pengwin yn symud yn osgeiddig trwy'r môr ger yr Antarctig ar fuanedd cyfartalog o dair metr yr eiliad. Deiliwch frasmcan ar gyfer rhif Reynolds llif y dŵr heibio ei chorff. Felly eglurwch os yw llifydd anludiog yn cynnig model da ar gyfer y llif hwn neu ddim. [7 marc]

Rhan B

8. Ystyriwch y maes cyflymder dau ddimensiwn $\underline{u} = t\underline{e}_x + \frac{3}{y}\underline{e}_y$, lle mae t yn dynodi amser.

(a) Rhowch hafaliad ar gyfer y llinell trwy'r pwynt (x_0, y_0) . [4 marc]

(b) Dangoswch fod gan y llinellwybr trwy'r pwynt (x_0, y_0) yr hafaliad

$$72(x - x_0) = (y^2 - y_0^2)^2.$$

[6 marc]

9. Mae dŵr yn llifo o dap gyda diamedr 1cm, trwy bibell â diamedr 2cm, ac yna allan trwy dwll chwistrellu byr â diamedr 5mm. Gellir tybio fod y dŵr yn anghywasg.

(a) Os yw'r hylif yn gadael y tap â buanedd o 1 m/s, beth yw ei fuanedd wrth iddo lifo allan o'r twll chwistrellu? [6 marc]

(b) Tybiwch mai'r cyflymiad o ganlyniad i ddisgyrchiant yw $g = 10\text{m/s}^2$, a bod y bibell yn disgyn o $h\text{m}$ dros ei hyd. Beth yw'r newid yng ngwasgedd y dŵr rhwng y tap a'r twll chwistrellu yn nhermau h a dwysedd y dŵr, ρ ? [7 marc]

10. (a) Mae potensial cyflymder ar gyfer llif llifydd penodol yn cael ei ddarganfod trwy gyfuno'r potensial ar gyfer llif unffurf â buanedd llifydd U , $\phi_1 = Ux$, gyda'r potensial ar gyfer dwbled â chryfder μ , $\phi_2 = \frac{\mu \cos \theta}{r}$. Darganfyddwch ffwythiant llif ar gyfer y llif hwn. [8 marc]

(b) Rhowch fynegiad ar gyfer y ffwythiant llif sy'n rheoli llif â maes cyflymder

$$\underline{u} = -U \cos \theta \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) \underline{e}_r + U \sin \theta \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) \underline{e}_\theta,$$

lle mae R yn gysonyn.

[5 marc]

11. Mae hylif anludiog homogenaidd yn ymestyn i anfeidredd lle mae'r gwasgedd yn sero. O fewn yr hylif mae yna swigen nwy sfferig. Mae'r gwasgedd yn y swigen (yn gyson trwyddi ac) mewn cyfrannedd gwrthdro â chyfaint y swigen i'r pŵer $4/3$. I ddechrau mae'r llifydd yn ddisymud, a radiws y swigen yw a a'r gwasgedd yn y swigen yw p_0 .

Gadewch i $R(t)$ ddynodi radiws y swigen. Ar gyfer safle rheiddiol r penodol yn y llifydd, mae R yn bodloni

$$\frac{R^2 \ddot{R}}{r} + \frac{2R \dot{R}^2}{r} - \frac{R^4 \dot{R}^2}{2r^4} = \frac{p}{\rho},$$

lle mae p a ρ yn dynodi gwasgedd a dwysedd yr hylif yn ôl eu trefn.

- (a) Dangoswch fod y gwasgedd p yn y swigen yn bodloni

$$p = p_0 \left(\frac{a}{R} \right)^4.$$

[4 marc]

- (b) Defnyddiwch y mynegiad

$$2R^2 \left(R \ddot{R} + \frac{3}{2} \dot{R}^2 \right) = \frac{d}{dR} \left(R^3 \dot{R}^2 \right),$$

er mwyn dangos fod R yn bodloni'r hafaliad

$$\rho \dot{R}^2 = 2p_0 \left(\frac{a^3}{R^3} - \frac{a^4}{R^4} \right)$$

yn y mudiant sy'n dilyn.

[10 marc]