

ADRAN MATHEMATEG / DEPARTMENT OF MATHEMATICS

ARHOLIADAU SEMESTER 2 / SEMESTER 2 EXAMINATIONS

MAI / MAY 2020

MT34210 - Dulliau Asymptotig mewn Mecaneg

Mae'r cwestiynau ar y papur hwn wedi cael eu hysgrifennu yn Gymraeg.

Os oes gennych unrhyw gwestiwn am y papur yn ystod yr arholiad, cysylltwch â chyd-gysylltydd y modiwl, Dr Adam Vellender, ar asv2@aber.ac.uk.

Dylech ysgrifennu eich datrysiadau ac yna uwchlwytho copi ohonynt i blackboard fel un ffeil PDF.

Amser a ganiateir - 3 awr

Mae'n rhaid cyflwyno eich atebion erbyn 12:30 (amser y DU).

Time allowed - 3 hours

Submission must be completed by 12:30 (UK time).

- Gellir rhoi cynnig ar bob cwestiwn.
- Rhoddir mwy o ystyriaeth i berfformiad yn rhan B wrth bennu marc dosbarth cyntaf.
- Mae modd i fyfyrwyr gyflwyno atebion i'r papur hwn naill ai yn y Gymraeg neu'r Saesneg.
- All questions may be attempted.
- Performance in section B will be given greater consideration in assigning a first class mark.
- Students may submit answers to this paper in either Welsh or English.

Fformiwlâu:

Mae'n bosib y bydd y cyfresi Taylor-Maclaurin a'r integrynnau pendant canlynol yn ddefnyddiol:

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, \quad \text{ar gyfer pob } x;$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \text{ar gyfer pob } x;$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad \text{ar gyfer } |x| < 1;$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Rhan A

1. Gadewch i

$$f(x) = x^3 \cos\left(\frac{3}{x}\right), \quad g(x) = 6x^3, \quad h(x) = x^2.$$

- (a) Profwch fod $f(x) = O(g(x))$ wrth i $x \rightarrow \infty$. [4 marc]
 (b) Profwch fod $g(x) = o(h(x))$ wrth i $x \rightarrow 0$. [4 marc]
 (c) Cynigwch rhyw ffwythiant a (sydd ddym yn hafal i f) lle mae $f(x) \sim a(x)$ wrth i $x \rightarrow 3/(2\pi)$. [2 farc]
 (d) Ydyw'r fformiwla asymptotig $g(x) = O(f(x))$ wrth i $x \rightarrow 0$ yn un dilys? Rhowch gyfiawnhad dros eich ateb. [5 marc]

2. Darganfyddwch frasmcanion asymptotig o'r ffurf $x = x_0 + \varepsilon x_1 + O(\varepsilon^2)$, $\varepsilon \rightarrow 0$, ar gyfer pob un o dri isradd yr hafaliad ciwbig aflonyddiad rheolaidd

$$x^3 - 2x - 2\varepsilon = 0,$$

lle mae $\varepsilon > 0$ yn baramedr bach. [10 marc]

3. Ystyriwch yr hafaliad pumradd

$$1 - 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\varepsilon^2 x^2 - \varepsilon^8 x^5 = 0,$$

lle mae $\varepsilon > 0$ yn baramedr bach.

- (a) Sawl isradd yn \mathbb{C} sydd gan hafaliad pumradd? [1 marc]
 (b) Rhowch y broblem derfan (hynny yw'r broblem sy'n cyfateb i $\varepsilon = 0$). Sawl isradd sydd gan y broblem derfan yma? [2 farc]
 (c) Felly nodwch (gan egluro eich rhesymeg yn gryno) os yw'r hafaliad pumradd yn un aflonyddiad rheolaidd neu'n un aflonyddiad hynod. [2 farc]
 (d) Lluniwch y graff Kruskal-Newton ar gyfer y broblem yma. [5 marc]
 (e) Ym mha ffurf(iau) fydddech yn ceisio amcangyfrif israddau'r broblem yma? Nodwch hefyd y nifer o israddau y byddai pob ansats yn gallu eu hamcangyfrif.

Nodyn: Nid oes angen i chi amcangyfrif yr israddau yma, dim ond rhoi ffurf neu ffurfiau priodol ar eu cyfer. [5 marc]

4. Ystyriwch y ffwythiant canlynol $\mathcal{I} : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, sydd wedi cael ei ddiffinio gan yr integryn:

$$\mathcal{I}(x) = \int_0^x e^{-t^2} \cos(t) dt,$$

- (a) Darganfyddwch ehangiad asymptotig ar gyfer $\mathcal{I}(x)$ wrth i $x \rightarrow 0$, gan roi eich ateb yn y ffurf $\mathcal{I}(x) = c_0x + c_1x^3 + c_2x^5 + O(x^7)$, $x \rightarrow 0$, lle mae c_0, c_1, c_2 yn gysonion yr ydych angen eu darganfod. [9 marc]
- (b) Felly nodwch os yw'r gosodiadau asymptotig canlynol yn wir neu'n anwir (nid oes angen i chi gyfiawnhau eich atebion):
- (i) $\mathcal{I}(x) = O(x)$, $x \rightarrow 0$;
- (ii) $\mathcal{I}(x) = o(x)$, $x \rightarrow 0$;
- (iii) $\mathcal{I}(x) \sim x$, $x \rightarrow 0$. [3 marc]
5. (a) Eglurwch yn gryno beth yw termau seciwlar a pham eu bod yn aml yn annymunol mewn brasamcanion o ffenomenau ffisegol. [3 marc]
- (b) Rhewch enghraifft o system ffisegol lle gall y dadansoddiad asymptotig arferol ohoni roi termau seciwlar. [1 marc]
- (c) Enwch ddull asymptotig sy'n cynnwys cael gwared o dermau seciwlar. [1 marc]
- (d) Nodwch yr holl dermau seciwlar yn yr hafaliad [2 marc]

$$x(t) = 3 \cos t + 5 \sin(3t) - 3t \sin t + 4t^2 \cos^2 t + e^{-t} t \cos(2t).$$

6. Gadewch i $\eta \gg 1$ fod yn baramedr positif mawr. Ystyriwch yr hafaliad differol cyffredin

$$3\eta\psi''(x) = (5 - x^3)\psi(x),$$

gydag amodau ffin $\psi(0) = 3$ a $\psi(2) = 8$.

- (a) Rhewch drefn yr hafaliad differol cyffredin, a nodwch os yw'n llinol neu'n aflinol. [2 marc]
- (b) Darganfyddwch frasamcan asymptotig dau derm o'r datrysiaid ψ yn y ffurf

$$\psi(x) = \psi_0(x) + \eta^{-1}\psi_1(x) + O(\eta^{-2}), \quad \eta \rightarrow \infty.$$

[9 marc]

Rhan B**7.** Ystyriwch yr integryn

$$\mathcal{K}(\lambda) = \int_{-1}^1 f(t)e^{-\lambda g(t)} dt$$

Ile rhoddir y ffwythiannau f a g gan

$$f(t) = \sin t + 2, \quad g(t) = 5 - 3 \cos t.$$

- (a) Ar gyfer pa werth o t mae'r ffwythiant $g(t)$ yn cymryd ei werth lleiaf ar y cyfwng $(-1, 1)$? Beth yw gwerth $g(t)$ yn y pwynt hwnnw? [2 farc]
- (b) Defnyddiwch ddull Laplace er mwyn perfformio dilyniant o frasamcanion er mwyn dangos fod

$$\mathcal{K}(\lambda) \sim \alpha \lambda^\beta e^{\gamma \lambda}, \quad \lambda \rightarrow \infty,$$

Ile mae α, β, γ yn gysonion y dylech eu darganfod. Rhwch esboniadau cryno o'r brasamcanion yr ydych yn ei ddefnyddio trwy eich gwaith. [10 marc]

8. Ystyriwch yr hafaliad giwbig aflonyddiad hynod

$$\varepsilon^2 x^3 + 2\varepsilon x^2 + 3x - 1 = 0,$$

Ile mae $\varepsilon > 0$ yn baramedr bach. Mae gan yr hafaliad un isradd aflonyddiad rheolaidd a dau isradd aflonyddiad hynod yn \mathbb{C} .

- (a) Eglurwch beth a olygir pan ddywedir fod problem sy'n cynnwys paramedr bach yn un *aflonyddiad hynod*. [2 farc]
- (b) Nodwch a datrysych y broblem terfan sy'n cyfateb i $\varepsilon = 0$ er mwyn cael brasamcan trefn arweiniol (un term) o'r isradd aflonyddiad rheolaidd. [2 farc]
- (c) Defnyddiwch yr ansats aflonyddiad hynod

$$x(\varepsilon) = \varepsilon^{-1}b(\varepsilon), \quad b(0) \neq 0,$$

er mwyn dargafod brasamcanion ar gyfer y ddau ddatrysiaid aflonyddiad hynod yn y ffurf

$$x = c_{\{-1\}}\varepsilon^{-1} + c_{\{0\}}\varepsilon^0 + O(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

Ile mae $c_{\{-1\}}$ a $c_{\{0\}}$ yn gysonion i'w darganfod ar gyfer pob un isradd aflonyddiad hynod.

[10 marc]

9. Defnyddiwch y dull Lindstedt-Poincaré er mwyn darganfod barsamcan asymptotig dau derm ar gyfer datrysiad cyfnodol o'r hafaliad Duffing

$$\ddot{x} + 9x - 4\epsilon x^3 = 0,$$

Ile mae'r system yn cael ei gollwng o ddisymudedd gydag osgled cychwynnol o $\frac{1}{2}$ a lle mae ϵ yn baramedr di-ddimensiwn bach a phositif. [15 marc]

Awgrym: Mae'n bosib y bydd y mynegiad trigonometrig canlynol yn ddefnyddiol:

$$\cos^3 \theta = \frac{1}{4} \cos 3\theta + \frac{3}{4} \cos \theta,$$

ac mae'r datrysiadau i'r hafaliad differol cyffredin $x''(t) + x(t) = A \cos(t) + B \cos(3t)$, $A, B \in \mathbb{R}$ o'r ffurf

$$x(t) = \frac{A}{2} t \sin t - \frac{1}{8} B \cos(3t) + c_1 \cos t + c_2 \sin t.$$

10. (a) Beth mae'n ei olygu i ddilyniant o ffwythiannau $\{\delta_n(x)\}$ fod yn ddilyniant asymptotig wrth i $x \rightarrow \infty$? [2 farc]
- (b) Gadewch i $a_n = (n+1)^2$ ar gyfer $n \in \mathbb{N}$. Profwch fod y dilyniant o ffwythiannau a ddiffinnir gan

$$\{\delta_n(x)\} = \{e^{3x} x^{-a_n}\}$$

ar gyfer $n \in \mathbb{N}$ yn ddilyniant asymptotig wrth i $x \rightarrow \infty$. [7 marc]