PRIFYSGOL ABERYSTWYTH UNIVERSITY

ADRAN MATHEMATEG / DEPARTMENT OF MATHEMATICS

ARHOLIADAU SEMESTER 1 / SEMESTER 1 EXAMINATIONS

IONAWR / JANUARY 2026

MT10310 – Tebygoleg

Mae'r cwestiynau ar y papur hwn yn ymddangos yn Gymraeg yn gyntaf. Mae fersiwn Saesneg o'r papur yn dilyn.

Amser a ganiateir - 2 awr

- Rhoddir marciau llawn am atebion cyflawn i bob cwestiwn yn Rhan A ac i dri cwestiwn yn Rhan B.
- Yn Rhan B, rhoddir credyd am y tri ateb gorau.
- Cyfrifianellau Casio FX-83 neu FX-85 YN UNIG a ganiateir.
- Darperir tablau ystadegol.
- Mae modd i fyfyrwyr gyflwyno atebion i'r papur hwn naill ai yn y Gymraeg neu'r Saesneg.

Time allowed - 2 hours

- Full marks will be given for complete answers to all questions in Section A and to three questions in Section B.
- In Section B, credit will be given for the best three answers.
- Casio FX-83 or FX-85 calculators ONLY may be used.
- Statistical tables will be provided.
- Students may submit answers to this paper in either Welsh or English.

© 2026 Prifysgol Aberystwyth

Rhan A

1. Rydych chi'n rhoi araith ar ôl swper ac yn gofyn i ffrind am rai jôcs. Maent yn darparu rhestr o jôcs sy'n cynnwys 5 o rai doniol, 3 sydd ddim yn ddoniol, a 2 sy'n amhriodol. Os ydych yn dewis 3 jôc ar hap o'r rhestr, darganfyddwch y tebygolrwydd fod:

(a) pob un ohonynt yn ddoniol;

(b) eich bod chi'n gwneud o leiaf un jôc amhriodol. [5 marc]

2. Nodwch y Gwirebau Tebygolrwydd (Kolmogorov). Profwch **yn uniongyrchol** o'r gwirebau, gan ddefnyddio deddfau digwyddiadau yn ôl yr angen, fod

$$\mathbb{P}\Big(A^{\complement} \cap B\Big) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

ar gyfer y digwyddiadau cyffredinol A, B. [5 marc]

3. Byddwch yn gorffen bwyta'ch cinio ar eich hoff fainc bicnic unrhyw bryd rhwng 12:30 a 1:40 PM (gyda phob amser yr un mor debygol). Bydd y wylan fwyaf ymosodol ar y campws yn dechrau cylchu'r fainc unrhyw bryd rhwng 1:00 ac 1:27 (eto, gyda pob amser yr un mor debygol). Mae'n sicr y bydd y wylan yn plymio ac yn ceisio cipio'ch bwyd os bydd yn cyrraedd tra byddwch chi'n bwyta. Gan dybio bod yr amser byddwch yn gorffen eich cinio ac amser cyrraedd y wylan yn annibynnol o'i gilydd, darganfyddwch y tebygolrwydd y byddwch chi'n bwyta'ch cinio heb i'r wylan eich herio am eich bwyd. [5 marc]

4. Rydych chi'n cymryd betiau ar ras geffylau gan eich ffrindiau. Rydych chi'n cynnig ods:

Ceffyl:	Fat Chance	Lucky Inmate	Monty Haul	Die Loaded
Ods:	14/1	7/2	3/2 ymlaen	8/1

[Mae'r ods yn erbyn, oni bai eu bod wedi'u nodi fel "ymlaen", pan fyddant o blaid.]

(a) Dangoswch eich bod chi'n cynnig ods *teg*.

(b) Gan dybio bod yr ods yn adlewyrchu'r tebygolrwydd o ennill, darganfyddwch y tebygolrwydd y bydd y ffefryn yn ennill. [5 marc]

5. Mae'r wynebau ar ddis safonol n-ochrog wedi'u labelu $1, 2, \ldots, n$, gyda pob canlyniad yr un mor debygol. Ystyriwch gêm lle rydych chi'n ennill £$3r$ os yw'r dis n-ochrog yn glanio ar ochr r. Os mai'r enillion *disgwyliedig* yw £19.5, yna darganfyddwch werth n. [Awgrym: $\sum_{r=1}^{n} r = n(n+1)/2$.] [5 marc]

6. Y tebygolrwydd y bydd tywysog go iawn yn cyrraedd ac yn deffro'r Dywysoges Hir ei Chwsg mewn unrhyw flwyddyn benodol yw $1/70$. O ystyried ei bod hi wedi cysgu am 50 mlynedd eisoes, darganfyddwch y tebygolrwydd y bydd hi'n cael ei deffro o fewn y 50 mlynedd nesaf. [5 marc]

7. Mae hyd can gan Y Pianydd, mewn X munud, â'r ffwythiant dwysedd tebygolrwydd

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 3; \\ \frac{1}{2}\mathrm{e}^{(3-x)/2}, & x \geq 3. \end{cases}$$

Darganfyddwch

(a) y ffwythiant dosraniad cronnus o X. [3 marc]

(b) Gan dybio ei fod yn dechrau cân am 9:02 PM, darganfyddwch y tebygolrwydd y bydd yn gorffen ar ôl 9:06 PM. [2 farc]

8. Gadewch i X gael ffwythiant dosraniad cronnus

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 3x^2 - 2x^3, & 0 \leq x \leq 1; \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

(a) Darganfyddwch y ffwythiant dwysedd tebygolrwydd o X;

(b) a diddwythwch y gwerth disgwyliedig o X. [5 marc]

Rhan B

9. (a) Rydych chi'n chwilio am eich cath sydd ar goll. Mae hi naill ai yn yr atig, yr ystafell wely, y gegin neu'r ardd. Rydych chi'n tybio ei bod hi yr un mor debygol o fod yn yr ystafell wely neu'r gegin, ddwywaith yn fwy tebygol o fod yn yr ystafell wely nag yn yr atig, ac mae siawns o 50% ei bod hi yn yr ardd.

Bydd eich mam, sy'n addoli'r gath, ac a adawodd gyfarwyddiadau clir i chi gadw llygad arni, yn dychwelyd yn fuan. Os yw'r gath yn yr ardd yna dim ond siawns o 5% sydd gennych o ddod o hyd iddi mewn pryd, tra ar gyfer yr atig, yr ystafell wely a'r gegin y siawns yw 20%, 70% a 60% yn y drefn honno.

(i) Ar gyfer pob lleoliad posib, cyfrifwch y tebygolrwydd ei bod yn y lleoliad hwnnw. [2 farc]

(ii) Lluniwch ddiagram addas i gynrychioli'r tebygolrwydd o ddod o hyd i'r gath. [4 marc]

Darganfyddwch y tebygolrwydd:

(iii) y byddwch yn dod o hyd i'r gath yn y gegin; [1 marc]

(iv) nad ydych chi'n dod o hyd i'r gath mewn pryd; [2 farc]

(v) fod y gath yn yr ystafell wely o wybod eich bod yn dod o hyd iddi. [2 farc]

(b) Rydych chi'n clywed miaw ac rydych chi'n siŵr ei fod yn dod oddi mewn i'r tŷ. Gan dybio bod tebygolrwydd perthynol yr ystafelloedd posibl sy'n weddill yn aros yr un fath, a bod siawns llwyddiant ym mhob lleoliad hefyd yn aros yr un fath, beth yw'r tebygolrwydd o ddod o hyd i'r gath mewn pryd nawr? [4 marc]

(c) Tra rydych yn y gegin rydych chi'n clywed miaw clir ac rydych chi'n siŵr ei bod hi yno, ond dim ond 10 munud sydd gennych chi cyn i'ch mam ddychwelyd. Mae gan amser darganfod y gath yn y gegin, mewn X munud, y ffwythiant dwysedd tebygolrwydd

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 2; \\ 4/(x+2)^2\,, & x \geq 2. \end{cases}$$

(i) Darganfyddwch y ffwythiant dosraniad cronnus o X; [3 marc]

(ii) a'r tebygolrwydd y byddwch chi'n dod o hyd i'r gath yn y gegin cyn i'ch mam ddychwelyd. [2 farc]

10. Rydych chi'n ymweld â ffair lle mae llawer o gemau siawns i'w mwynhau a'u dadansoddi.

(a) Mae cymeriad amheus yn dod atoch ac yn cynnig £10 i chi os byddwch chi'n rholio "dwbl chwech" o fewn 20 rholiad o ddau ddis arferol, ond fel arall rydych chi'n talu £10 iddyn nhw. Rydych chi (yn gywir) yn amau giamocs, ac felly gwnewch gyfrifiad.
Darganfyddwch y nifer *tecaf* ar gyfer y rholiadau a ganiateir i gael "dwbl chwech" yn y gêm hon. [5 marc]

(b) Mewn gêm arall, rydych chi'n saethu peli paent at darged crwn. Mae llwybr y peli braidd yn anrhagweladwy, felly dim ond siawns o 60% sydd gennych o daro'r targed. Os cymerwch bum ergyd, darganfyddwch y tebygolrwydd fod:

(i) pob ergyd yn taro'r targed; [2 farc]

(ii) llai na thair ergyd yn taro'r targed. [3 marc]

Mae hecsagon rheolaidd wedi'i lunio y tu mewn i'r targed, fel bod y fertigau'n cyffwrdd â'r ymyl, gan roi chwe segment o amgylch y targed. Mae dau wedi'u lliwio'n las a'r lleill yn wyrdd. Rydych chi'n ennill £10 am daro segment glas, £5 am daro segment gwyrdd, £1 am daro y tu mewn i'r hecsagon, a dim byd am fethu.

(iii) Darganfyddwch yr enillion disgwyliedig ar gyfer un ergyd. [6 marc]

(c) Gallwch chi hefyd roi cynnig ar droelli platiau. Mae gan yr amser y gallwch chi gadw'r plât yn troelli, mewn X munud, y ffwythiant dwysedd tebygolrwydd

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 3/(x+1)^4\,, & x \geq 0. \end{cases}$$

Darganfyddwch y tebygolrwydd y gallwch chi gadw'r plât yn troelli am fwy nag un munud. [4 marc]

11. Mae'n rhaid i galiwn trysor Sbaenaidd basio trwy foroedd llawn môr-ladron ar ei thaith o'r Amerig i Sbaen.

Mae'r siawns y bydd y galiwn yn profi ymosodiad a cael ei dal gan fôr-ladron yr un mor debygol ar bob taith, yn annibynnol o unrhyw deithiau blaenorol.

Mae gan nifer y teithiau, N, y mae gailiwn yn ei wneud cyn profi ymosodiad gan fôr-ladron y ffwythiant màs tebygolrwydd:

$$p(n) = \left(\frac{13}{15}\right)^n \frac{2}{13}, \quad \text{ar gyfer } n = 1, 2, 3, \ldots \text{ (a sero fel arall).}$$

(Gallwch dybio y bydd teithiau'r gailiwn yn cael eu cwblhau'n llwyddiannus oni bai bod môr-ladron yn ymosod arni.)

(a) Pa fath o ddosraniad tebygolrwydd mae N yn ei ddilyn? [1 marc]

(b) Gwiriwch fod $p(n)$ yn ffwythiant màs tebygolrwydd dilys. [4 marc]

(c) Ysgrifennwch (neu ddeilliwch) y ffwythiant dosraniad cronnus o N. [2 farc]

(d) Darganfyddwch y tebygolrwydd fod y galiwn:

(i) yn cael ei dal ar y drydedd fordaith; [2 farc]

(ii) yn gwneud llai na 4 mordaith cyn cael ei dal; [2 farc]

(iii) yn goroesi mwy nag 20 mordaith cyn cael ei dal; [2 farc]

(iv) yn goroesi o leiaf 5 mordaith arall, o ystyried ei bod wedi gwneud 15 yn barod. [3 marc]

(e) Cyfrifwch, o egwyddorion sylfaenol, y nifer disgwyliedig o fordeithiau a wneir cyn i'r galiwn gael ei dal. [4 marc]

AWGRYM: Gallwch ddefnyddio'r canlyniadau canlynol ar gyfer $|x| < 1$:

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = (1 - x)^{-1}, \text{ a}$$
$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots = (1 - x)^{-2}.$$

12. (a) Gadewch i

$$A = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 4\}; \quad B = \{1, 2, 5, 6\}; \quad C = \{1, 2, 7, 8\}$$

ddynodi canlyniadau posib rholiad dis teg 8-ochrog.

(i) Dangoswch fod A, B, C yn annibynnol *fesul pâr*. [4 marc]

(ii) Ydynt yn *gwbl* annibynnol? [2 farc]

Gadewch i $D = \{2n - 1 : n \leq 4, n \in \mathbb{N}\}$.

(iii) Dangoswch fod A, B, D yn *gwbl* annibynnol. [4 marc]

(b) Y ffwythiant dosraniad cronnus o X yw

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \frac{1}{32}(6x^2 - x^3), & 0 \leq x \leq 4; \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

(i) Darganfyddwch a brasluniwch y ffwythiant dwysedd tebygolrwydd cyfatebol o X.

[5 marc]

(ii) Felly darganfyddwch y cymedr o X, [2 farc]

(iii) a'r amrywiant o X. [3 marc]

13. Dewisir pwynt Q ar hap o'r linell AB sydd â hyd o 5, fel bod pob pwynt ar y llinell yr un mor debygol. Gadewch i X ddynodi hyd AQ.

(a) Ysgrifennwch y ffwythiant dosraniad cronnus F_X o X. [2 farc]

(b) Dewisir ail bwynt ar hap ar y llinell. Gadewch i Y ddynodi'r pellter mwyaf o A o'r ddau bwynt. Darganfyddwch y ffwythiant dosraniad cronnus o Y. [3 marc]

(c) Ar gyfer n pwynt ar hap ar y llinell, gadewch i Z ddynodi'r pellter mwyaf o A o'r holl bwyntiau. Dangoswch mai ffwythiant dosraniad cronnus yr hapnewidyn Z yw:

$$F_Z(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^n/5^n & 0 \leq x \leq 5 \\ 1 & x > 5. \end{cases}$$

[3 marc]

(d) Darganfyddwch ganolrif Z yn nhermau n. [2 farc]

(e) Darganfyddwch y ffwythiant dwysedd tebygolrwydd o Z, ac felly dangoswch fod:

$$\mathbb{E}(Z^m) = \frac{5^m n}{m + n}, \qquad \text{ar gyfer } m, n = 1, 2, 3, \ldots.$$

[6 marc]

(f) Felly, darganfyddwch y cymedr a'r amrywiant o Y. [4 marc]