PRIFYSGOL ABERYSTWYTH UNIVERSITY

ADRAN MATHEMATEG / DEPARTMENT OF MATHEMATICS

ARHOLIADAU SEMESTER 1 / SEMESTER 1 EXAMINATIONS

IONAWR / JANUARY 2026

MT10510 – Algebra

Mae'r cwestiynau ar y papur hwn yn ymddangos yn Gymraeg yn gyntaf. Mae fersiwn Saesneg o'r papur yn dilyn.

Amser a ganiateir - 2 awr

- Rhoddir marciau llawn am atebion cyflawn i bob cwestiwn yn Rhan A ac i dri cwestiwn yn Rhan B.
- Yn Rhan B, rhoddir credyd am y tri ateb gorau.
- Ni cheir defnyddio cyfrifianellau.
- Mae modd i fyfyrwyr gyflwyno atebion i'r papur hwn naill ai yn y Gymraeg neu'r Saesneg.

Time allowed - 2 hours

- Full marks will be given for complete answers to all questions in Section A and to three questions in Section B.
- In Section B, credit will be given for the best three answers.
- Calculators are not permitted.
- Students may submit answers to this paper in either Welsh or English.

© 2026 Prifysgol Aberystwyth

Rhan A

1. Ystyriwch y setiau canlynol:

$$A = \{a \in \mathbb{N} : a(a^2-2)(a^2-4) = 0\},$$
$$B = \{b \in \mathbb{Z} : |b| \leq 3\},$$
$$C = \{1, 3, 7\}.$$

Pennwch, yn echblyg, y setiau canlynol:

a) A; b) $A \cup B$; c) $A \times C$; d) $|\mathcal{P}(C)|$.

[5 marc]

2. Darganfyddwch rifau cymarebol q, a ac r fel bod

$$0.3\overline{081} = q + \sum_{k=0}^{\infty} ar^k.$$

Trwy hyn mynegwch $0.3\overline{081}$ fel ffracsiwn yn ei ffurf symlaf. [5 marc]

3. Ystyriwch y rhifau cymhlyg $a = 8 - 4i$ a $b = -1 + i$. Pennwch rannau real a dychmygol y rhifau cymhlyg canlynol:

a) $z_1 = \frac{1}{2}a + 3b$; b) $z_2 = ab$; c) $z_3 = e^{\frac{3\pi}{2}i}$; d) $z_4 = a^{-1}$.

[5 marc]

4. Darganfyddwch bob $x \in \mathbb{R}$ sy'n bodloni $\dfrac{2}{x-1} > 4 - x$. [5 marc]

5. Profwch drwy anwythiad mathemategol bod $2n^3 + 3n^2 + n$ yn rhanadwy â 6 ar gyfer pob cyfanrif $n \geq 1$. [5 marc]

6. Gwahanwch $\dfrac{8 - 9x}{3x^2 - 10x + 8}$ i ffracsiynau rhannol. [5 marc]

7. Ystyriwch y polynomial $p(x) = 3x^3 - 13x^2 + kx + 65$, lle mae k yn rif real penodol. O wybod fod $3 - 2i$ yn wreiddyn $p(x)$, darganfyddwch holl wreiddiau $p(x)$ a gwerth k. [5 marc]

8. Mae un, yn union, o'r ffwythiannau canlynol yn ddeusaethol:

$$f : [0, \infty) \to [-1, \infty),\ f(x) = x^3 + x^2 + 2;$$
$$g : [5, \infty) \to [2, \infty),\ g(x) = x^2 - 10x + 27.$$

a) Nodwch yr un sydd **ddim** yn ddeusaethol a chyfiawnhewch pam nad ydy'n ddeusaethol.

b) Diffiniwch wrthdro y ffwythiant deusaethol yn llawn.

[5 marc]

Rhan B

9. Ystyriwch y polynomialau

$$a(x) = 2x^5 + 11x^4 + 11x^3 - 13x^2 - 35x - 56 \text{ a } b(x) = (x^2 - x - 2)(x^2 + 6x + 9).$$

a) Bodola polynomial $q(x)$ fel bod

$$a(x) = q(x)b(x) + r(x),$$

lle mae $r(x) = 4x^3 + 28x^2 + 22x - 38$. Darganfyddwch $q(x)$. [5 marc]

b) Trwy hyn, gwahanwch $\dfrac{a(x)}{b(x)}$ i ffracsiynau rhannol. [15 marc]

10. a) Datryswch yr hafaliad isod ar gyfer $z \in \mathbb{C}$. Ysgrifennwch bob datrysiad ar ffurf esbonyddol, yn nhermau ei brif arg, yn echblyg.

(i) $z^6 + 4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i = 0$. [6 marc]

(ii) $z^6 - 8z^3 + 64 = 0$. [8 marc]

b) Defnyddiwch Theorem De Moivre i ddangos fod $\sin\frac{3\pi}{5}$ yn wreiddyn i'r polynomial $p(x) = 16x^4 - 20x^2 + 5$. [6 marc]

11. a) Gadawer i a a b fod yn rifau real annegatif. Profwch fod

$$a < b \iff a^2 < b^2.$$

[4 marc]

b) Darganfyddwch y set o'r holl $x \in \mathbb{R}$ sy'n bodloni

$$\left|2x^2 - 3x - 2\right| < x^2 + 2.$$

[6 marc]

c) Darganfyddwch y set o'r holl $x \in \mathbb{R}$ sy'n bodloni

$$\left|\frac{2x+1}{x+2}\right| < \left|\frac{x+3}{x+6}\right|.$$

[10 marc]

12. a) Gadawer i $T_0 := 0$ ac ar gyfer pob cyfanrif $n \geq 1$, gadawer i $T_n := \sum_{r=1}^{n} r$.

(i) Nodwch fformiwla ar gyfer T_n yn nhermau n yn unig, pan mae $n \geq 1$. [2 farc]

(ii) Profwch fod $T_n^2 - T_{n-1}^2 = n^3$ ar gyfer pob cyfanrif $n \geq 1$. [4 marc]

(iii) Trwy hyn, neu fel arall, profwch fod $\sum_{r=1}^{n} r^3 = T_n^2$ ar gyfer pob cyfanrif $n \geq 1$. [4 marc]

b) Diffinnir dilyniant (u_n) o gyfanrifau positif gan $u_1 = 1$, $u_2 = 2$ ac

$$u_{n+1} = 2u_n + 2u_{n-1} \text{ ar gyfer pob } n > 1.$$

Profwch drwy anwythiad mathemategol cryf bod $u_n = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\alpha^n - \beta^n\right)$ ar gyfer pob cyfanrif positif n, lle α a β yw'r ddau ddatrysiad gwahanol i'r hafaliad $x^2 - 2x - 2 = 0$ ac $\alpha > 0$. [*Awgrym: cyfrifwch α a β yn gyntaf.*] [10 marc]

13. a) Nodwch y theorem binomial ar gyfer esbonyddion sy'n gyfanrifau positif. [4 marc]

b) Nodwch y term cyffredinol yn ehangiad binomial $\left(3x^3 - \dfrac{1}{3x^4}\right)^{15}$ yn ei ffurf symlaf. Trwy hyn darganfyddwch gyfernod x^{-25} gan ysgrifennu eich ateb fel ffracsiwn yn ei ffurf symlaf. [6 marc]

c) Ysgrifennwch y 4 term cyntaf yn ehangiad binomaidd $(1 + x)^{\frac{1}{3}}$, lle mae $|x| < 1$, gan symleiddio'r cyfernodau cyn belled ag y bo modd. Defnyddiwch eich canlyniad er mwyn darganfod ehangiad degol $\sqrt[3]{8.72}$ wedi'i dalgrynnu i 4 lle degol. Dangoswch eich holl waith cyfrifo yn glir er mwyn ennill credyd llawn. [10 marc]