PRIFYSGOL ABERYSTWYTH UNIVERSITY

ADRAN MATHEMATEG / DEPARTMENT OF MATHEMATICS

ARHOLIADAU SEMESTER 1/ SEMESTER 1 EXAMINATIONS

IONAWR / JANUARY 2026

MT20110 - Dadansoddiad Real

Mae'r cwestiynau ar y papur hwn yn ymddangos yn Gymraeg yn gyntaf. Mae fersiwn Saesneg o'r papur yn dilyn.

Amser a ganiateir - 2 awr

- Gellir rhoi cynnig ar bob cwestiwn.
- Rhoddir mwy o ystyriaeth i berfformiad yn rhan B wrth bennu marc dosbarth cyntaf.
- Cyfrifianellau Casio FX83 neu FX85 YN UNIG a ganiateir.
- Mae modd i fyfyrwyr gyflwyno atebion i'r papur hwn naill ai yn y Gymraeg neu'r Saesneg.

Time allowed - 2 hours

- All questions may be attempted.
- Performance in section B will be given greater consideration in assigning a first class mark.
- Casio FX83 or FX85 calculators ONLY may be used.
- Students may submit answers to this paper in either Welsh or English.

© 2025 Prifysgol Aberystwyth

Rhan A

1. Diffinnir $f : [-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$ gan

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{os yw } -\pi \leq x < 0, \\ x^2 & \text{os yw } 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

(a) Brasluniwch estyniad cyfnodol-2π f ar y cyfwng $[-3\pi, 3\pi]$. [2 farc]

(b) Dangoswch fod cyfres Fourier f yn cael ei rhoi gan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2\pi(-1)^{n+1}}{n} + \frac{4((-1)^n - 1)}{\pi n^3} \right) \sin nx.$$

[8 marc]

(c) Nodwch gyfres Fourier $g : [-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$ a ddiffinnir gan $g(x) = f(x) + \cos 7x$. [2 farc]

2. Trwy ystyried y dilyniant o symiau rhannol, dangoswch fod y gyfres anfeidraidd

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+5)(k+6)}$$

yn gydgyfeiriol a darganfyddwch ei gwerth. [5 marc]

3. Penderfynwch a yw'r cyfresi isod yn gydgyfeiriol neu beidio, gan nodi'n glir pa brawf am gydgyfeiriant rydych yn defnyddio a'ch ymresymiad:

$$\text{(a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+4}}; \text{ (b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{n^2+n-1}; \text{ (c) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{2n^2+7n+3}.$$

[4,5,4 marc]

4. Ar gyfer pob un o'r cyfresi pŵer isod, darganfyddwch holl werthoedd x fel bod y gyfres yn cydgyfeirio. Darganfyddwch radiws y cydgyfeiriant ym mhob achos.

$$\text{(a) } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{(k+2)^2}(x-1)^k; \text{ (b) } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)!}{\exp(k^2)}x^k.$$

[6,5 marc]

5. Darganfyddwch gyfres Taylor $\cos 2x$ o amgylch $x = 0$. Profwch fod y gyfres yn cydgyfeirio at $\cos 2x$ ar gyfer $x > 0$. [5,5 marc]

6. Ar gyfer $n \in \mathbb{N}$, diffinnir $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ gan

$$f_n(x) = \begin{cases} 2 - 6nx & \text{os yw } 0 \leq x < 1/(3n), \\ 0 & \text{os yw } 1/(3n) \leq x \leq 1 - 1/(3n), \\ 6n(x-1) + 2 & \text{os yw } 1 - 1/(3n) \leq x \leq 1. \end{cases}$$

(a) Darganfyddwch derfan fesul pwynt (f_n). [4 marc]

(b) Dangoswch nad yw (f_n) yn cydgyfeirio'n unffurf at ei derfan fesul pwynt. [3 marc]

7. (a) Eglurwch beth mae'n ei olygu i ddweud bod ffwythiant $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ yn *ddi-dor* yn y pwynt $\mathbf{a}$ ar gyfer rhyw $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$. [2 farc]

(b) Diffinnir $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gan

$$f(x,y) = \begin{cases} (3xy^4 + 8xy)/(|x| + y^4) & \text{os yw } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{os yw } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

a

$$g(x,y) = \begin{cases} 4xy/(y + x^2) & \text{os yw } y \neq -x^2, \\ 0 & \text{os yw } y = -x^2. \end{cases}$$

Profwch fod f yn ddi-dor yn $(0,0)$ ond dyw g ddim yn ddi-dor yn $(0,0)$. [5,5 marc]

MAE RHAN B YN CYCHWYN AR Y DUDALEN NESAF

Rhan B

8. Gadawer i $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fod yn eil-ffwythiant cyfnodol-2π sy'n bodloni $f(x) = \pi - x$ ar y cyfwng $[0, \pi]$.

(a) Dangoswch fod cyfres Fourier f yn cael ei rhoi gan

$$\frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}.$$

[8 marc]

(b) Defnyddiwch Theorem Cydgyfeiriant Fourier er mwyn diddwytho fod

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

[5 marc]

9. Tybiwch fod $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ yn gyfresi real sy'n bodloni $b_n \neq 0$ ar gyfer pob $n \in \mathbb{N}$, a bod

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{b_n} \right| = l \text{ ar gyfer rhyw } l > 0.$$

Profwch os yw $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ yn gydgyfeiriol absoliwt, yna mae $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ yn cydgyfeirio. [7 marc]

10. (a) Nodwch a phrofwch *Prawf yr Integryn* ar gyfer cyfresi real. [2,9 marc]

(b) Penderfynwch a yw'r gyfres isod yn gydgyfeiriol neu beidio:

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^2}.$$

[6 marc]

11. Diffinnir

$$\mathcal{L} = \{f : [1,4] \to \mathbb{R} : |f(x) - f(y)| \leq 3|x - y| \text{ ar gyfer pob } x, y \in [1,4]\}.$$

Gadawer i $(f_n) \subset \mathcal{L}$ fel bod f_n yn cydgyfeirio'n unffurf at f ar gyfer rhyw $f : [1,4] \to \mathbb{R}$. Diffinnir $g : [1,4] \to \mathbb{R}$ gan $g(x) = x^2 + f(x)$. Dangoswch fodola $M > 0$ fel bod $|g(x) - g(y)| \leq M|x - y|$ ar gyfer pob $x, y \in [1,4]$. [7 marc]

12. Diffinnir $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gan $h(x, y) = 2xy^2$. Gan weithio'n uniongyrchol â diffiniad deilliad, profwch fod h yn ddifferadwy ym mhob man yn $\mathbb{R}^2$. [6 marc]

DIWEDD Y PAPUR ARHOLIAD