PRIFYSGOL ABERYSTWYTH UNIVERSITY

ADRAN MATHEMATEG / DEPARTMENT OF MATHEMATICS

ARHOLIADAU SEMESTER 2 / SEMESTER 2 EXAMINATIONS

MAI – MEHEFIN / MAY – JUNE 2026

MT11010 – Algebra a Chalcwlws Pellach

Mae'r cwestiynau ar y papur hwn yn ymddangos yn Gymraeg yn gyntaf. Mae fersiwn Saesneg o'r papur yn dilyn.

Amser a ganiateir - 2 awr

- Rhoddir marciau llawn am atebion cyflawn i bob cwestiwn yn Rhan A ac i dri cwestiwn yn Rhan B.
- Yn Rhan B, rhoddir credyd am y tri ateb gorau.
- Cyfrifianellau Casio FX-83 neu FX-85 YN UNIG a ganiateir.
- Mae taflen fformiwlâu wedi cael ei hatodi.
- Mae modd i fyfyrwyr gyflwyno atebion i'r papur hwn naill ai yn y Gymraeg neu'r Saesneg.

Time allowed - 2 hours

- Full marks will be given for complete answers to all questions in Section A and to three questions in Section B.
- In Section B, credit will be given for the best three answers.
- Casio FX-83 or FX-85 calculators ONLY may be used.
- A formula sheet is attached.
- Students may submit answers to this paper in either Welsh or English.

© 2026 Prifysgol Aberystwyth

Rhan A

1. Gadewch i

$$\underline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} -7 \\ 11 \end{bmatrix}, \quad \underline{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}, \quad \underline{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Darganfyddwch pa rai o'r matricsau canlynol sydd wedi'u diffinio (os oes rhai o gwbl):

(i) $\underline{\mathbf{A}}\,\underline{\mathbf{B}}\,\underline{\mathbf{C}}$; (ii) $\underline{\mathbf{B}}^{-1}\,\underline{\mathbf{C}}^{\mathsf{T}}$; (iii) $\underline{\mathbf{C}}\,\underline{\mathbf{B}}^{\mathsf{T}} + \underline{\mathbf{B}}\,\underline{\mathbf{C}}^{\mathsf{T}}$.

Rhowch eglurhad pan nad yw'r matrics wedi'i ddiffinio, a cyfrifwch y matricsau sydd wedi'u diffinio. [5 marc]

2. Gadewch i

$$\underline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Darganfyddwch y gwrthdro o $\underline{\mathbf{A}}$ gan ddefnyddio dileu Gauss-Jordan. [5 marc]

3. Defnyddiwch y rheol Cramer er mwyn datrys y system ganlynol o hafaliadau llinol:

$$\begin{cases} 3x - y &= 9; \\ 5x + 2y &= 4. \end{cases}$$

[5 marc]

4. Gadewch i

$$\underline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}.$$

Darganfyddwch y gwerthoedd eigen o $\underline{\mathbf{A}}$ a'r fectorau eigen cyfatebol. [5 marc]

5. Gadewch i $f(x, y) = \dfrac{1}{2xy} - x \sin 3y$, ar gyfer $x, y \neq 0$.

Darganfyddwch y deilliadau rhannol $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, a dangoswch fod $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

[5 marc]

6. Ystyriwch yr amnewidiad newidynnau canlynol:

$$\begin{cases} x = \mathrm{e}^u \cos v, \\ y = \mathrm{e}^u \sin v. \end{cases}$$

Darganfyddwch y matrics Jacobian $\underline{\mathbf{J}} = \underline{\mathbf{J}}(x, y; u, v)$ (yn nhermau u a v) a'i ddeterminant (yn ei ffurf symlaf). [5 marc]

7. Darganfyddwch y brasamcan llinol o $f(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ yn agos i $(3, -4)$. [5 marc]

8. Enrhifwch yr integryn dwbl

$$I = \int_{x=-1}^{2} \int_{y=x^2}^{x+2} 10y \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x.$$

[5 marc]

Rhan B

9. Ystyriwch y system ganlynol o hafaliadau llinol (1):

$$\begin{cases} x + 2y - z & = 4, \\ 2x - y + 3z & = 7, \\ 3x + ky + 2z & = a. \end{cases} \tag{1}$$

(a) Gadewch i $k = 2, a = 11$.

(i) Darganfyddwch ddeterminant y matrics cyfernodau ac eglurwch pam gellir defnyddio rheol Cramer i ganfod datrysiadau system (1). [3 marc]

(ii) Darganfyddwch y datrysiad gan ddefnyddio'r rheol Cramer. [6 marc]

(b) (i) Dangoswch nad oes gan system (1) ddatrysiad unigryw ar gyfer $k = 1$.[3 marc]

(ii) Darganfyddwch holl ddatrysiadau system (1) gan ddefnyddio'r broses Dileu Gaussaidd ar gyfer $k = 1, a = 11$. [5 marc]

(iii) Dangoswch nad oes gan system (1) unrhyw ddatrysiad ar gyfer $k = 1, a = 4$. [3 marc]

10. (a) Gadewch i $f(x, y) = 2x^3 + xy^2 - 6x^2 - 3y^2$. Darganfyddwch y pwynt(iau) critigol o f a pennwch eu natur. [12 marc]

(b) Gadewch i

$$\underline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Darganfyddwch y gwrthdro o $\underline{\mathbf{A}}$ gan ddefnyddio dull ehangiad Laplace. [8 marc]

11. (a) Gadewch i

$$\underline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}.$$

(i) Darganfyddwch y gwerthoedd eigen o $\underline{\mathbf{A}}$. [4 marc]

(ii) Gwiriwch y gwerthoedd eigen gan ddefnyddio'r determinant neu olin $\underline{\mathbf{A}}$.[2 farc]

(iii) Darganfyddwch y fectorau eigen **uned** o $\underline{\mathbf{A}}$ sy'n cyfateb i'r gwerthoedd eigen. [4 marc]

(b) Ystyriwch yr integryn

$$I = \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{x^2} \frac{1}{\sqrt{y}} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x.$$

(i) Eglurwch pam fod yr integryn yn *afreolaidd*. [2 farc]

(ii) Enrhifwch yr integryn. [8 marc]

12. (a) Gadewch i

$$\underline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}; \quad \underline{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \underline{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -6 \end{bmatrix};$$

ac i $\mathrm{S}_{BA}, \mathrm{S}_{CBA}$ ddynodi y delweddau o'r sgwâr uned (gyda'i fertig isaf ar y chwith wedi'i leoli yn y tarddbwynt) o dan y trawsffurfiadau $\underline{\mathbf{B}}\,\underline{\mathbf{A}}$ a $\underline{\mathbf{C}}\,\underline{\mathbf{B}}\,\underline{\mathbf{A}}$ yn ôl eu trefn.

(i) Nodwch y gwerthoedd eigen a'r fectorau eigen o $\underline{\mathbf{A}}$. [2 farc]

(ii) Dangoswch fod $\underline{\mathbf{B}}$ yn orthogonol. [2 farc]

(iii) Darganfyddwch yr arwynebedd o S_{BA}. [2 farc]

(iv) Brasluniwch y siâp S_{BA} yn y plân xy. [2 farc]

(v) Eglurwch pam fod yr arwynebedd o S_{CBA} yn sero. [2 farc]

(b) Gadewch i

$$I = \int_{y=0}^{2} \int_{x=y^2}^{4} \frac{y}{x} \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y.$$

Brasluniwch y parth integru. Yna newidiwch drefn yr integru, ac enrhifwch yr integryn. [10 marc]

13. Mae solid S yn llenwi'r cyfaint sydd wedi'i ffinio gan yr arwynebau $z = 0, z = 4 - x^2 - y^2$, a'r silindr $x^2 + y^2 = 1$. Mae ganddo ddwysedd $\rho(x, y, z) = 6z$.

(a) Er mwyn cyfrifo màs M y solid S, ystyriwch yr amnewidiad newidynnau:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta; \\ y = r\sin\theta; \\ z = z. \end{cases}$$

Felly:

(i) mynegwch ffiniau'r solid yn y system gyfesurynnau yma; [2 farc]

(ii) cyfrifwch y determinant o'r Jacobian $\underline{\mathbf{J}}(x, y; r, \theta)$; [2 farc]

(iii) ac felly dangoswch (gyda terfynau addas) fod

$$M = \iiint_V 6z\, r\, \mathrm{d}z\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\theta;$$

[2 farc]

(iv) darganfyddwch y terfynau integru; [2 farc]

(v) datryswch yr integryn triphlyg er mwyn dangos fod $M = 37\pi$. [6 marc]

(b) Darganfyddwch y cydran z o graidd màs S. [6 marc]

Fformiwlâu Defnyddiol

Unfathiannau Trigonometrig

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \iff \tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$$
$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$
$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta$$
$$\iff \sin^2\theta = (1-\cos 2\theta)/2 \iff \cos^2\theta = (1+\cos 2\theta)/2$$
$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = (\sin\theta + \cos\theta)^2 - 1$$

Deilliadau ac Integrynnau Safonol

$$\frac{\mathrm{d}x^n}{\mathrm{d}x} = nx^{n-1} \qquad \int x^n\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{n+1}x^{n+1} + c,\ n \neq -1$$
$$\frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^{kx}}{\mathrm{d}x} = k\mathrm{e}^{kx} \qquad \int \mathrm{e}^{kx}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{k}\mathrm{e}^{kx} + c$$
$$\frac{\mathrm{d}\ln x}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x} \qquad \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + c$$
$$\frac{\mathrm{d}\sin x}{\mathrm{d}x} = \cos x \qquad \int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + c$$
$$\frac{\mathrm{d}\cos x}{\mathrm{d}x} = -\sin x \qquad \int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + c$$
$$\frac{\mathrm{d}\tan x}{\mathrm{d}x} = \sec^2 x \qquad \int \sec^2 x\,\mathrm{d}x = \tan x + c$$
$$\frac{\mathrm{d}\arcsin(x/a)}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} \qquad \int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin(x/a) + c$$
$$\frac{\mathrm{d}\arccos(x/a)}{\mathrm{d}x} = \frac{-1}{\sqrt{a^2-x^2}} \qquad \int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x = -\arccos(x/a) + c$$
$$\frac{\mathrm{d}\arctan(x/a)}{\mathrm{d}x} = \frac{a}{x^2+a^2} \qquad \int \frac{1}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{a}\arctan(x/a) + c$$