PRIFYSGOL ABERYSTWYTH UNIVERSITY

ADRAN MATHEMATEG / DEPARTMENT OF MATHEMATICS

ARHOLIADAU SEMESTER 2 / SEMESTER 2 EXAMINATIONS

MAI – MEHEFIN / MAY – JUNE 2026

MT11210 – Hafaliadau Differol

Mae'r cwestiynau ar y papur hwn yn ymddangos yn Gymraeg yn gyntaf. Mae fersiwn Saesneg o'r papur yn dilyn.

Amser a ganiateir - 2 awr

- Rhoddir marciau llawn am atebion cyflawn i bob cwestiwn yn Rhan A ac i dri cwestiwn yn Rhan B.
- Yn Rhan B, rhoddir credyd am y tri ateb gorau.
- Ni cheir defnyddio cyfrifianellau.
- Mae modd i fyfyrwyr gyflwyno atebion i'r papur hwn naill ai yn y Gymraeg neu'r Saesneg.

Time allowed - 2 hours

- Full marks will be given for complete answers to all questions in Section A and to three questions in Section B.
- In Section B, credit will be given for the best three answers.
- Calculators are not permitted.
- Students may submit answers to this paper in either Welsh or English.

© 2026 Prifysgol Aberystwyth

Rhan A

1. Ysgrifennwch drefn a gradd yr hafaliadau differol canlynol gan nodi p'un ai ydynt yn llinol ai peidio:

(a) $\left(\dfrac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}\right)^2 + 2\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y^2 = x;$

(b) $\left(\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right)^3 + y = 2;$

(c) $\dfrac{\mathrm{d}^3x}{\mathrm{d}t^3} + t\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - 1 = 0;$

(d) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + e^x y = x;$

(e) $\sin x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 7(y - x - 1).$

[5 marc]

2. Darganfyddwch y datrysiad i'r hafaliad differol canlynol sy'n bodloni $y(0) = 0$:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3e^{-x} + 6x + 2\cos(2x).$$

[5 marc]

3. Datryswch yr hafaliad differol llinol, trefn un canlynol o wybod fod $y(1) = 3$:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{2}{x}y = 10x.$$

[5 marc]

4. Darganfyddwch ddatrysiad neilltuol echblyg i'r hafaliad differol canlynol sy'n bodloni'r amod $y(0) = 1$:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{e^x + 2}{6y^2}.$$

[5 marc]

5. Dangoswch fod yr hafaliad differol canlynol yn homogenaidd a darganfyddwch ei ddatrysiad cyffredinol:

$$x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x + y.$$

[5 marc]

6. Darganfyddwch ddatrysiad cyffredinol yr hafaliad differol trefn dau canlynol:

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + 5\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 6y = 12e^x.$$

[5 marc]

7. Darganfyddwch y datrysiad $y = y(t)$ i'r hafaliad differol canlynol sy'n bodloni'r amodau cychwynnol penodol:

$$\ddot{y} + 4y = 8e^{2t}; \quad y(0) = 1, \quad \dot{y}(0) = 4.$$

[5 marc]

8. Darganfyddwch y datrysiad cyffredinol echblyg i'r hafaliad Bernoulli canlynol:

$$x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - 2y + 10x^2y^2 = 0.$$

[5 marc]

Rhan B

9. Darganfyddwch ddatrysiadau cyffredinol yr hafaliadau differol isod:

(a) $y'' - 3y' - 4y = 12e^{3x} + 4x^2 + 6x + 2$; [10 marc]

(b) $y'' - 6y' + 9y = 4e^{3x} + 50\cos(x)$. [10 marc]

10. (a) Trwy ystyried deilliad $u = e^y \sin(2x)$ neu fel arall, darganfyddwch y datrysiad cyffredinol echblyg i'r hafaliad differol canlynol:

$$e^y\left(\cos(2x) + \sin(2x)\right) + \frac{e^y}{2}\sin(2x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - 2x = 0.$$

[10 marc]

(b) Darganfyddwch y datrysiad cyffredinol (ymhlyg) i'r hafaliad differol aflinol canlynol:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x + y + 3}{x - y + 3}.$$

[10 marc]

11. Gan adael y datrysiad yn y ffurf symlaf posibl, datryswch

$$y'' + y = \sec x,$$

ar gyfer $x \in (-\pi/2, \pi/2)$, yn amodol ar yr amodau ffin $y(0) = 1$ ac $y'(0) = 1$. [20 marc]

Mae Rhan B yn parhau ar y dudalen nesaf

12. Rhoddir cwpan o goffi y tu allan. Mae'r tymheredd amgylchynol yn gyson ar $20°\mathrm{C}$. Mae deddf oeri Newton yn rhoi

$$\frac{\mathrm{d}T_s}{\mathrm{d}t} = -k_0(T_s - 20), \qquad (*)$$

lle $T_s(t)$ yw tymheredd (°C) y coffi ar amser t (mewn munudau) mewn aer llonydd, a $k_0 > 0$ yw cyfernod trosglwyddo gwres cyson.

Tybiwch yn awr fod buanedd y gwynt yn amrywio'n gyfnodol gydag amser, gan newid y cyfradd colli gwres. Y cyfernod trosglwyddo gwres effeithiol yw

$$k(t) = k_0\left(1 + \frac{1}{5}\sin t\right),$$

ac felly, gan adael i $T_w(t)$ ddynodi tymheredd y coffi ar ddiwrnod gwyntog,

$$\frac{\mathrm{d}T_w}{\mathrm{d}t} = -k_0\left(1 + \frac{1}{5}\sin t\right)(T_w - 20). \qquad (\dagger)$$

(a) Darganfyddwch y datrysiad neilltuol echblyg i (†) sy'n bodloni'r amod cychwynnol $T_w(0) = 90$. [8 marc]

(b) Gan egluro'ch rhesymu'n glir, darganfyddwch $\lim_{t\to\infty} T_w(t)$ a rhowch ddehongliad ffisegol o'r canlyniad. [5 marc]

(c) Heb ddatrys unrhyw hafaliadau differol pellach, nodwch ddatrysiad (∗) gyda'r amod cychwynnol $T_s(0) = 90$. Tybiwch fod un cwpan o goffi yn cael ei roi mewn aer llonydd ac un arall yn yr awel ar yr un pryd. Beth y gellir ei ddweud am ba goffi sy'n boethach, ac ar ba adeg? Cyfiawnhewch eich ateb yn fathemategol. [7 marc]

13. Mae gan tanc mawr agored arwynebedd croestoriadol llorweddol cyson o A m^2. Ar waelod y tanc mae twll cylchol bach o arwynebedd a m^2, lle mae a yn llawer llai na A.

Gadewch i $h(t)$ ddynodi dyfnder y dŵr (mewn metrau) yn y tanc ar amser t eiliad.

Yn ôl deddf Torricelli, buanedd y dŵr sy'n gadael drwy'r twll yw

$$v = \sqrt{2gh},$$

lle g yw'r cyflymiad disgyrchiant mewn $\mathrm{m/s}^2$. Yn unol â hynny, cyfradd llif cyfeintiol yr all-lif yw

$$Q_{\text{out}} = a\sqrt{2gh}.$$

Yn gychwynnol, mae'r tanc yn cynnwys dŵr o ddyfnder $h_0 > 0$, ac nid oes unrhyw ddŵr yn llifo i mewn i'r tanc.

(a) Gan ddefnyddio cadwraeth cyfaint, deilliwch hafaliad differol trefn un gwahanadwy a fodlonir gan $h(t)$, a nodwch amod cychwynnol priodol. [5 marc]

(b) Datryswch y broblem gwerth cychwynnol a geir yn rhan (a) yn echblyg er mwyn cael $h(t)$. [7 marc]

(c) Darganfyddwch yr amser T pan fydd y tanc yn gwagio (hynny yw, pan fo $h(T) = 0$). Mynegwch eich ateb yn nhermau A, a, g, a h_0. [3 marc]

(d) Beth sy'n digwydd i $\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$ wrth i $t \to T$? Cyfiawnhewch eich ateb yn fathemategol. [5 marc]

DIWEDD Y PAPUR