PRIFYSGOL ABERYSTWYTH UNIVERSITY

ADRAN MATHEMATEG / DEPARTMENT OF MATHEMATICS

ARHOLIADAU SEMESTER 2 / SEMESTER 2 EXAMINATIONS

MAI – MEHEFIN / MAY – JUNE 2026

MT11310 – Ystadegaeth

Mae'r cwestiynau ar y papur hwn yn ymddangos yn Gymraeg yn gyntaf. Mae fersiwn Saesneg o'r papur yn dilyn.

Amser a ganiateir - 2 awr

- Rhoddir marciau llawn am atebion cyflawn i bob cwestiwn yn Rhan A ac i dri cwestiwn yn Rhan B.
- Yn Rhan B, rhoddir credyd am y tri ateb gorau.
- Cyfrifianellau Casio FX-83 neu FX-85 YN UNIG a ganiateir.
- Darperir tablau ystadegol.
- Mae modd i fyfyrwyr gyflwyno atebion i'r papur hwn naill ai yn y Gymraeg neu'r Saesneg.

Time allowed - 2 hours

- Full marks will be given for complete answers to all questions in Section A and to three questions in Section B.
- In Section B, credit will be given for the best three answers.
- Casio FX-83 or FX-85 calculators ONLY may be used.
- Statistical tables will be provided.
- Students may submit answers to this paper in either Welsh or English.

© 2026 Prifysgol Aberystwyth

Rhan A

1. Mae gan yr hapnewidyn X gymedr o $1/7$ a gwyriad safonol o $1/4$.

(a) Darganfyddwch y gwerthoedd o (i) $\mathbb{E}[28X - 6]$ (ii) $\mathrm{Var}(28X - 6)$.

(b) Rhwng pa derfynau mae disgwyl i swmp gwerthoedd $28X - 6$ orwedd? [5 marc]

2. Mae gan yr hapnewidyn X ddosraniad Binomial, $\mathrm{Bin}(n, p)$, gyda chymedr o 308 ac amrywiant o 187. Darganfyddwch (a) werthoedd n a p, (b) $\mathbb{E}[X(X - 1)]$. [5 marc]

3. Yn yr achosion canlynol, nodwch os y gallai'r model Binomial, $\mathrm{Bin}(n, p)$, fod yn ddilys ar gyfer yr hapnewidyn X ai peidio. Os gall, rhowch werthoedd ar gyfer n a p. Fel arall, awgrymwch ddewis arall synhwyrol.

(a) Mae 80% o offer gan wneuthurwr penodol yn weithredol, tra bod y gweddill yn ddiffygiol. Caiff swp mawr o'r offer eu profi fesul un nes bod 10 o rai gweithredol wedi'u canfod; X yw nifer yr offer a brofwyd.

(b) Mae'n hysbys fod 20% o fatris gan gyflenwr penodol yn para'n hirach na 1200 awr. Allan o 30 batri a ddewisir ar hap, X yw'r nifer sy'n para llai na 1200 awr.

(c) Mae'n hysbys fod bylbiau golau o fath penodol yn para 3000 awr ar gyfartaledd, gyda gwyriad safonol o 50 awr. X yw cyfanswm hyd bywyd 100 o fylbiau golau o'r math hwn a ddewisir ar hap. [5 marc]

4. Defnyddiwch y Tablau Ystadegol i ddarganfod (a) $\mathbb{P}(2 \leq X < 7)$ os yw $X \sim \mathrm{Bin}(100, 0.05)$, a (b) $\mathbb{P}(Y > 92)$ os yw $Y \sim \mathrm{Bin}(100, 0.96)$. [5 marc]

5. Mae gan ystadegyn X y ffwythiant dwysedd tebygolrwydd

$$f(x) = 4\theta^{-4}x^3, \quad 0 < x < \theta,$$

lle mae $\theta > 0$ yn baramedr anhysbys. Dangoswch fod $\mathbb{P}(0.1\theta < X < 0.9\theta) = 0.656$, ac felly diddwythwch gyfwng hyder 65.6% ar gyfer θ. [5 marc]

6. Mae cwmni'n berchen ar gadwyn o bum siop goffi, â refeniw dyddiol annibynnol gyda dosraniadau Normal â chymedrau 320, 450, 112, 640, 270 (£), a gwyriadau safonol 20, 50, 40, 50, 30 (£), yn ôl eu trefn.

(a) Darganfyddwch gymedr a gwyriad safonol cyfanswm refeniw dyddiol y gadwyn.

(b) Darganfyddwch y tebygolrwydd fod cyfanswm y refeniw ar un diwrnod yn llai na £1600. [5 marc]

7. Gadewch i $\mathrm{Var}(U) = 2$, $\mathrm{Var}(V) = 5$ a $\mathrm{Var}(U - 3V) = 29$. Darganfyddwch (a) y cydamrywiant rhwng U a V, a (b) $\mathrm{Cov}(U, 2U + V)$. [5 marc]

Mae'r cwestiynau'n parhau ...

8. Pan fydd paladr golau laser yn cael ei bwyntio at synhwyrydd ffoton, mae'r ffotonau yn y paladr yn cyrraedd y synhwyrydd ar hap ar gyfradd gyfartalog o λ bob meicroeiliad.

(a) Nodwch y dosraniad ar gyfer y nifer o ffotonau a gyfrifir mewn 5 microeiliad.

(b) Cwblhewch brawf o'r rhagdybiaethau $H_0 : \lambda = 3$ yn erbyn $H_1 : \lambda > 3$, o ystyried bod y synhwyrydd wedi'i droi ymlaen am 5 microeiliad a bod 22 ffoton wedi'u cyfrif. Nodwch y gwerth P a'ch casgliad gan ddefnyddio lefel arwyddocâd 5%. [5 marc]

Mae'r cwestiynau'n parhau ...

Rhan B

9. (a) Enrhifwch $\mathbb{P}(X = k+1)/\mathbb{P}(X = k)$ ac felly darganfyddwch y modd(au) o X pan fod

(i) $X \sim \mathrm{Pasc}(10, \frac{1}{2})$; [6 marc]

(ii) $\mathbb{P}(X = k) = \dfrac{k}{20}\left(\dfrac{4}{5}\right)^k$, $k = 1, 2, \ldots$. [4 marc]

(b) Mae 20% o etholaeth fawr yn cefnogi ymgeisydd A mewn etholiad, tra bod 50% yn cefnogi ymgeisydd B. Gadewch i X ac Y ddynodi niferoedd y cefnogwyr o A a B, yn ôl eu trefn, mewn arolwg barn sy'n cynnwys 800 aelod o'r etholaeth a ddewisir ar hap.

(i) Nodwch ddosraniadau X, Y, a $X + Y$; [3 marc]

(ii) Darganfyddwch yr amrywiannau o X, Y, a $X + Y$; [3 marc]

(iii) Darganfyddwch y cydberthyniad rhwng X ac Y. [4 marc]

10. Mae cyfran p o offer a gynhyrchwyd gan wneuthurwr yn weithredol.

(a) Tybiwch fod $p = 0.93$. Cyfrifwch y tebygolrwydd fod mwy na 3 o'r offer yn ddiffygiol allan o 20 sy'n cael eu profi, gan ddefnyddio'r dulliau canlynol:

(i) y dosraniad Binomial union; [4 marc]

(ii) y brascamcan Normal; [5 marc]

(iii) y brasamcan Poisson. [3 marc]

Cofiwch enwi'r newidyn perthnasol, ac ymhob achos (i)-(iii), nodwch y dosraniad perthnasol yn glir, a darganfyddwch y tebygolrwydd gan ddefnyddio'r Tablau Ystadegol.

(b) Mae'r gwneuthurwr yn honni bod 93% o'r offer yn weithredol, ond rydych yn amau fod y ganran yn llai na hynny. Mae ugain o'r offer yn cael eu profi, ac mae 16 ohonynt yn rhai gweithredol.

(i) Yn seiliedig ar y wybodaeth yma, cwblhewch brawf rhagdybiaeth i asesu'r honiad, gan ddefnyddio lefel arwyddocâd o 5%, a'r canlyniad o rhan (a.i). Er mwyn cael marciau llawn, byddwch angen gosod y camau perthnasol yn ofalus. [6 marc]

(ii) Ydyw'r naill frasamcan neu'r llall o rhan (a) yn rhoi'r casgliad cywir? Cyfiawnhewch eich rhesymeg yn seiliedig ar eich canlyniadau yn rhan (a). [2 farc]

11. Pan fydd paladr golau laser yn cael ei bwyntio at synhwyrydd ffoton, mae'r ffotonau yn y paladr yn cyrraedd sgrin y synhwyrydd ar hap ar gyfradd gyfartalog o λ y microeiliad. Caiff pob ffoton sy'n cyrraedd y synhwyrydd ei gyfrif.

(a) Gadewch i $\lambda = 3$, ac ystyriwch y nifer o ffotonau a gyfrifir mewn dau gyfnod arsylwi o 10 ac 20 microeiliad, sydd ddim yn gorgyffwrdd, ac yn y drefn honno. Gadewch i N_1 a N_2 ddynodi'r canlyniadau ar gyfer niferoedd y ffotonau a gyfrifwyd.

(i) Nodwch y dosraniadau o N_1 a N_2. [3 marc]

(ii) Darganfyddwch y tebygolrwydd y cyfrifir mwy nag 20 ond llai na 30 ffoton yn y cyfnod arsylwi cyntaf. [3 marc]

(iii) Cyfrifwch y cydberthyniad rhwng $N_1 + N_2$ a $N_1 - N_2$. [4 marc]

(b) Gadewch i T ddynodi'r amser lle canfyddir y ffoton cyntaf (wedi'i fesur o'r amser y troir y synhwyrydd ymlaen). Nodwch ddosraniad T ac eglurwch pam fod T yn amcangyfrif diduedd o'r paramedr $\phi = 1/\lambda$. [2 farc]

(c) Yn ôl y gwneuthurwr, mae'r laser yn cynhyrchu ffotonau gyda chyfradd $\lambda = 3$. O wybod fod y ffoton cyntaf wedi'i ganfod 0.04 microeiliad ar ôl troi'r synhwyrydd ymlaen, ydyw'n rhesymol amau bod y gyfradd yn uwch nag a honnir? Gwnewch brawf priodol: nodwch y rhagdybiaethau yn nhermau'r paramedr ϕ o rhan (b), ysgrifennwch ffwythiant dwysedd tebygolrwydd yr ystadegyn prawf os ydych yn tybio'r rhagdybiaeth nwl, cyfrifwch y gwerth P, a nodwch eich casgliad gan ddefnyddio lefel arwyddocâd 5%. [8 marc]

12. Mae gan yr hapnewidyn X y ffwythiant dwysedd tebygolrwydd

$$f(x) = \begin{cases} 2\theta^{-1}x, & 0 < x < \theta, \\ 2(1-\theta)^{-1}(1-x), & \theta < x < 1, \end{cases}$$

lle mae $0 < \theta < 1$ yn baramedr anhysbys.

(a) Dangoswch fod $f(x)$ yn ffwythiant dwysedd tebygolrwydd dilys, gan egluro'n benodol lle rydych yn defnyddio'r amod $0 < \theta < 1$. [5 marc]

(b) Dangoswch fod $\mathbb{E}[X] = (1+\theta)/3$. [3 marc]

(c) Darganfyddwch amcangyfrifyn diduedd T o θ sy'n seiliedig ar X. [3 marc]

(d) Caiff hapsampl $X_1, \ldots, X_{50}$ ei dynnu o ddosraniad X.

(i) Nodwch amcangyfrifyn diduedd $\overline{T}$ o θ sy'n seiliedig ar y cymedr sampl $\overline{X}$. [1 marc]

(ii) Defnyddiwch y Theorem Terfan Ganolog i adnabod y dosraniad bras o $\overline{T}$ os yw $\theta = \frac{1}{2}$. [8 marc]

13. (a) Gadewch i X, Y, a V fod yn hapnewidynnau Normal ar y cyd gyda chymedrau 2, -2, 0, a gwyriadau safonol 5, 5, 7, yn ôl eu trefn. Y cydberthyniad rhwng X ac Y yw $-1/2$, y cydberthyniad rhwng X a V yw $1/2$, a'r cydberthyniad rhwng Y a V yw $-2/3$.

(i) Cyfrifwch $\mathrm{Var}(X + 2Y)$. [3 marc]

(ii) Nodwch y dosraniad o $X + 2Y$. [2 farc]

(iii) Cyfrifwch $\mathrm{Cov}(X + 2Y, 3V)$. [3 marc]

(iv) Darganfyddwch y dosraniad o $X+2Y+3V$, ac felly cyfrifwch y tebygolrwydd fod $X + 2Y + 3V > 0$. [5 marc]

(b) Mae'n hysbys fod hyd math penodol o bysgod mewn llyn penodol wedi'i ddosrannu'n Normal gyda chymedr anhysbys μ a gwyriad safonol hysbys o 5 cm. Ystyriwch y prawf o'r rhagdybiaeth $H_0 : \mu = 20$ (cm) yn erbyn $H_1 : \mu > 20$, yn seiliedig ar ddaliad o 10 pysgodyn gydag hyd cyfartalog o 22.7 cm.

(i) Eglurwch (mewn ychydig eiriau) beth ydyw'r *boblogaeth* yn y cyd-destun hwn. [1 marc]

(ii) Darganfyddwch y dosraniad o'r ystadegyn prawf perthnasol, gan dybio fod y rhagdybiaeth nwl yn wir. [2 farc]

(iii) Darganfyddwch y gwerth P, a nodwch y casgliad o'r prawf rhagdybiaeth gan ddefnyddio lefel arwyddocâd o 5%. [4 marc]