PRIFYSGOL ABERYSTWYTH UNIVERSITY

ADRAN MATHEMATEG / DEPARTMENT OF MATHEMATICS

ARHOLIADAU SEMESTER 2/ SEMESTER 2 EXAMINATIONS

MAI / MAY 2026

MT21410 - Algebra Llinol

Mae'r cwestiynau ar y papur hwn yn ymddangos yn Gymraeg yn gyntaf. Mae fersiwn Saesneg o'r papur yn dilyn.

Amser a ganiateir - 2 awr

- Gellir rhoi cynnig ar bob cwestiwn.
- Rhoddir mwy o ystyriaeth i berfformiad yn Rhan B wrth bennu marc dosbarth cyntaf.
- Cyfrifianellau Casio FX-83 neu FX-85 YN UNIG a ganiateir.
- Mae modd i fyfyrwyr gyflwyno atebion i'r papur hwn naill ai yn y Gymraeg neu'r Saesneg.

Time allowed - 2 hours

- All questions may be attempted.
- Performance in Section B will be given greater consideration in assigning a first class mark.
- Casio FX-83 or FX-85 calculators ONLY may be used.
- Students may submit answers to this paper in either Welsh or English.

© 2026 Prifysgol Aberystwyth

Rhan A

1. Penderfynwch ba rai o'r is-setiau o $\mathbb{R}^3$ canlynol sy'n isofodau.

(a) $S_1 = \{(x, y, z) : x + y + z = 1\}$; [3 marc]

(b) $S_2 = \{(x, y, z) : 4x - y - 2z = 0\}$; [5 marc]

(c) $S_3 = \{(x, y, z) : x - y + z \geq 0\}$; [4 marc]

(d) $S_4 = \{(x, y, z) : x^2 - 5yz = 0\}$; [4 marc]

(e) $S_5 = \{(x, y, z) : x^6 + |y| + |z| = 0\}$. [4 marc]

2. Penderfynwch ba rai o'r is-setiau o $\mathbb{R}^3$ canlynol sy'n llinol annibynnol.

(a) $\{(0, 6, 7), (3, 2, 1), (0, 0, 0)\}$; [2 farc]

(b) $\{(0, 0, 7), (0, 0, -7), (2, 5, 1)\}$; [2 farc]

(c) $\{(1, 3, 2), (2, 2, 1), (2, -2, 6)\}$; [4 marc]

(d) $\{(1, 5, 2), (4, 2, -1), (2, 4, 1)\}$. [4 marc]

3. Gadawer i $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ fod y gofod fector o bolynomialau (yn y newidyn x) o radd 3 neu'n llai sydd â chyfernodau real. Diffinnir $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ gan

$$\mathcal{F} = \{(2a - b)x^3 + (a + c)x^2 + (b + 2c)x - 6a : a, b, c \in \mathbb{R}\}.$$

Darganfyddwch set rychwantu ar gyfer $\mathcal{F}$. [3 marc]

4. Gadawer i $M_{2\times2}(\mathbb{R})$ fod y gofod fector o fatricsau 2×2 sydd â chofnodion real. Diffinnir yr isofod $\mathcal{M} \subset M_{2\times2}(\mathbb{R})$ gan

$$\mathcal{M} = \text{sp}\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}\right).$$

Profwch fod dim $\mathcal{M} = 2$, lle mae dim $\mathcal{M}$ yn dynodi dimensiwn $\mathcal{M}$. [5 marc]

5. Diffinnir $T : \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4$ gan

$$T(ax^3 + bx^2 + cx + d) = (3a + b, c - d, -6a - 2b, c + 4d),$$

lle mae $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

(a) Profwch fod T yn drawsffurfiad llinol. [4 marc]

(b) Darganfyddwch y matrics sy'n cynrychioli T mewn perthynas â'r sylfeini safonol. [4 marc]

(c) Darganfyddwch gnewyllyn T a gofod delwedd T, a rhowch sylfeini ar eu cyfer. [4,5 marc]

6. Darganfyddwch holl werthoedd-eigen a gofodau-eigen y trawsffurfiad llinol $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a roddir gan $T(x) = Ax$, lle mae

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

[9 marc]

Gan roi cyfiawnhad priodol, dangoswch ni ellir croeslinio A. [4 marc]

MAE RHAN B YN CYCHWYN AR Y DUDALEN NESAF

Rhan B

7. Gadawer i $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ fod y gofod fector o bolynomialau (yn y newidyn x) o radd 2 neu'n llai sydd â chyfernodau real. Dangoswch fod $\{x^2+2x+1, x-1, 3\}$ yn rhychwantu $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$. [4 marc]

8. Gadawer i V fod yn ofod fector, a gadawer i $u, v, w \in V$.

(a) Eglurwch beth mae'n olygu i $\{u, v, w\}$ fod yn *llinol annibynnol*. [2 farc]

(b) O wybod fod $\{u, v, w\}$ yn llinol annibynnol, profwch fod $\{3u, u+2w, v-w\}$ yn llinol annibynnol. [3 marc]

9. Gadawer i W_1 ac W_2 fod yn isofodau o ofod fector V.

(a) Profwch fod:

(i) $W_1 \cap W_2$ yn isofod o V; [3 marc]

(ii) $W_1 + W_2 = \{w_1 + w_2 : w_1 \in W_1, w_2 \in W_2\}$ yn isofod o V. [3 marc]

(b) Eglurwch beth yw ystyr *dimensiwn* gofod fector. [2 farc]

(c) Tybiwch fod W_1 ac W_2 yn ddimensiynol-feidraidd. Dangoswch fod

$$\dim(W_1 + W_2) + \dim(W_1 \cap W_2) = \dim W_1 + \dim W_2,$$

lle mae dim U yn dynodi dimensiwn y gofod fector U. [10 marc]

(Cewch ddefnyddio'r canlyniad y gellir estyn set llinol annibynnol i sylfaen mewn gofod fector meidraidd-ddimensiynol, heb brawf.)

(d) Tybiwch ymhellach fod V yn feidraidd-ddimensiynol, a bod U yn isofod o V sy'n bodloni $V = U + W_1 = U + W_2$ gydag $U \cap W_1 = U \cap W_2 = \{0\}$. Profwch fod

$$\dim V - 2\dim U \leq \dim (W_1 \cap W_2) \leq \dim V - \dim U.$$

[4 marc]

10. Gadawer i V fod yn ofod fector ddimensiynol-feidraidd, a gadawer i $T : V \to V$ fod yn drawsffurfiad llinol.

(a) Diffiniwch *cnewyllyn* T, *nwliti* T, *gofod delwedd* T, a *ranc* T, a ddynodir gan $\mathrm{Ker}(T)$, $\nu(T)$, $\mathrm{Im}(T)$ a $\rho(T)$ yn ôl eu trefn. [4 marc]

(b) Nodwch a phrofwch theorem y dimensiwn ar gyfer y trawffurfiad llinol $T : V \to V$. [1 marc]

(c) Profwch fod

$$\rho(T^2) \leq \frac{1}{2}(\rho(T) + \rho(T^3)),$$

lle mae $T^2, T^3 : V \to V$ yn dynodi'r trawsffurfiadau llinol a ddiffinnir gan $T^2(v) = T(T(v))$ a $T^3(v) = T(T(T(v)))$ ar gyfer $v \in V$ yn ôl eu trefn. [10 marc]

11. Gadawer i $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$, y gofod fector o fatricsau $n \times n$ sydd â chofnodion cymhlyg. Tybiwch fod $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ yn werthoedd-eigen A gwahanol; profwch os yw $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ yn fector-eigen sy'n cyfateb i λ, yna nid yw $4\mathbf{x}$ yn fector-eigen sy'n cyfateb i μ. [4 marc]

DIWEDD Y PAPUR ARHOLIAD