PRIFYSGOL ABERYSTWYTH UNIVERSITY

**ADRAN MATHEMATEG / DEPARTMENT OF MATHEMATICS**

**ARHOLIADAU SEMESTER 2 / SEMESTER 2 EXAMINATIONS**

**MAI – MEHEFIN / MAY – JUNE 2026**

# MT21510 – Dadansoddiad Cymhlyg

Mae'r cwestiynau ar y papur hwn yn ymddangos yn Gymraeg yn gyntaf. Mae fersiwn Saesneg o'r papur yn dilyn.

**Amser a ganiateir - 2 awr**

- Gellir rhoi cynnig ar bob cwestiwn.
- Rhoddir mwy o ystyriaeth i berfformiad yn Rhan B wrth bennu marc dosbarth cyntaf.
- Cyfrifianellau Casio FX-83 neu FX-85 YN UNIG a ganiateir.
- Mae modd i fyfyrwyr gyflwyno atebion i'r papur hwn naill ai yn y Gymraeg neu'r Saesneg.

**Time allowed - 2 hours**

- All questions may be attempted.
- Performance in Section B will be given greater consideration in assigning a first class mark.
- Casio FX-83 or FX-85 calculators ONLY may be used.
- Students may submit answers to this paper in either Welsh or English.

© 2026 Prifysgol Aberystwyth

## Rhan A

**1**. Brasluniwch y gyfran o'r plân cymhlyg sy'n cyfateb i'r anhafaleddau canlynol.

(a) $Re(z-1) \geq 0$ [3 marc]

(b) $|z+i| \leq 2$ [3 marc]

(c) $|Im(z)| \leq 1$ [4 marc]

**2**. Darganfyddwch yr holl rifau cymhlyg, yn y ffurf $z = x + iy$ gyda $x, y \in \mathbb{R}$, sy'n bodloni $z^3 = -27$. Brasluniwch y datrysiadau ar y plân cymhlyg. [10 marc]

**3**. (a) Nodwch yr hafaliadau Cauchy-Riemann ar gyfer ffwythiant $f$ sy'n ddadansoddol. [3 marc]

(b) Dangoswch fod yn rhaid i ffwythiant $f$ ar $\mathbb{C}$ sy'n ddadansoddol a gyda gwerth real fod yn gyson. Awgrym: Defnyddiwch yr hafaliadau Cauchy-Riemann er mwyn dangos fod $f' = 0$. [7 marc]

**4**. (a) Pa amod mae *ffwythiant harmonig* yn ei fodloni? [2 farc]

(b) Gwiriwch fod $u(x,y) = 2x^2 + x + 1 - 2y^2$ yn harmonig (lle mae $x, y \in \mathbb{R}$). [3 marc]

(c) Darganfyddwch y cyfiau harmonig $v(x,y)$ o $u(x,y)$, ac felly darganfyddwch ffwythiant dadansoddol

$$f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$$

sy'n bodloni

$$f(0) = 1 + i.$$

[5 marc]

**5**. (a) Brasluniwch y cyfran o'r plân cymhlyg sy'n ddelwedd o'r cwadrant $\{z = x + iy : x \geq 0, y \geq 0\}$ o dan y mapiad esbonyddol. [5 marc]

(b) Nodwch y diffiniad o'r prif gangen $Log$ o'r logarithm ac ysgrifennwch

$$Log(1 + i\sqrt{3})$$

yn y ffurf $x + iy$ gyda $x, y \in \mathbb{R}$. [5 marc]

**6**. (a) Ysgrifennwch fformiwla integrol Cauchy. [2 farc]

(b) Os mai $C$ yw'r amlin cylchol $|z| = 2$, defnyddiwch fformiwla integrol Cauchy i enrhifo

$$\oint_C \frac{\exp \pi z}{(z+i)(z+3i)}\, dz.$$

[8 marc]

**7**. (a) Cyfrifwch y gyfres Laurent o gwmpas $z = 0$ o'r ffwythiant

$$f(z) = \frac{1}{z^4(z+i)}.$$

[7 marc]

(b) Sut gellir cael y gweddill, $res_f(0)$, ar gyfer y ffwythiant $f$ o rhan (a), o'r gyfres Laurent? Cyfrifwch $res_f(0)$ yn echblyg. [3 marc]

## Rhan B

**8**. Enrhifwch yr integrynnau canlynol

(a)

$$\int_{C_1} |z|^2 \, dz,$$

lle mae $C_1$ yn dynodi'r segment llinell syth o $1+i$ hyd at $2-i$. [8 marc]

(b)

$$\int_{C_2} e^z \, dz,$$

lle mae $C_2$ yn dynodi'r hanner cylch o $\pi$ trwy $i\pi$ hyd at $-\pi$. [2 farc]

**9**. (a) Nodwch y diffiniad o bôl syml. [1 marc]

(b) Nodwch y fformiwla terfan ar gyfer enrhifo'r gweddill mewn pôl syml. [1 marc]

(c) Tybiwch fod $p$ a $q$ yn bolynomialau fel bod $p(0) \neq 0$, $q(0) = 0$ a $q'(0) \neq 0$. Dangoswch fod $0$ yn bôl syml o'r ffwythiant cymarebol $f(z) = p(z)/q(z)$ a profwch y gellir cyfrifo'r gweddill o $f$ yn $0$ yn yr achos hwn fel

$$res_f(0) = \frac{p(0)}{q'(0)}.$$

[8 marc]

**10**. Defnyddiwch y Theorem Gweddill er mwyn enrhifo'r integrynnau canlynol:

(a)

$$\oint_{|z|=3} \frac{e^{2z}}{z^2+4z+4} \, dz,$$

[7 marc]

(b)

$$\oint_{|z+1-i|=1} \frac{1}{z^4+4} \, dz,$$

[10 marc]

(c)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x^2+2)} \, dx,$$

[8 marc]

(d)

$$\int_0^{2\pi} (\sin t)^6 \, dt.$$

[5 marc]