PRIFYSGOL ABERYSTWYTH UNIVERSITY

ADRAN MATHEMATEG / DEPARTMENT OF MATHEMATICS

ARHOLIADAU SEMESTER 2 / SEMESTER 2 EXAMINATIONS

MAI – MEHEFIN / MAY – JUNE 2026

MT25610 – Hydrodynameg I

Mae'r cwestiynau ar y papur hwn yn ymddangos yn Gymraeg yn gyntaf. Mae fersiwn Saesneg o'r papur yn dilyn.

Amser a ganiateir - 2 awr

- Gellir rhoi cynnig ar bob cwestiwn.
- Rhoddir mwy o ystyriaeth i berfformiad yn Rhan B wrth bennu marc dosbarth cyntaf.
- Cyfrifianellau Casio FX-83 neu FX-85 YN UNIG a ganiateir.
- Mae modd i fyfyrwyr gyflwyno atebion i'r papur hwn naill ai yn y Gymraeg neu'r Saesneg.

Time allowed - 2 hours

- All questions may be attempted.
- Performance in Section B will be given greater consideration in assigning a first class mark.
- Casio FX-83 or FX-85 calculators ONLY may be used.
- Students may submit answers to this paper in either Welsh or English.

© 2026 Prifysgol Aberystwyth

Fformiwlâu defnyddiol
Yn y nodiant arferol:

$$\nabla\phi = \frac{1}{h_1}\frac{\partial\phi}{\partial x_1}\underline{e}_1 + \frac{1}{h_2}\frac{\partial\phi}{\partial x_2}\underline{e}_2 + \frac{1}{h_3}\frac{\partial\phi}{\partial x_3}\underline{e}_3$$

$$\nabla.\underline{u} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left(\frac{\partial(h_2h_3u_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(h_1h_3u_2)}{\partial x_2} + \frac{\partial(h_1h_2u_3)}{\partial x_3}\right)$$

$$\nabla\wedge\underline{u} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix} h_1\underline{e}_1 & h_2\underline{e}_2 & h_3\underline{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ h_1u_1 & h_2u_2 & h_3u_3 \end{vmatrix}$$

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial\phi}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{h_1h_3}{h_2}\frac{\partial\phi}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial\phi}{\partial x_3}\right)\right)$$

Yr hafaliadau Euler sy'n cysylltu cyflymder $\underline{u}$ a gwasgedd p yw

$$\rho\frac{D\underline{u}}{Dt} = -\underline{\nabla}p + \underline{F}.$$

Y cydrannau r a θ, yn y cyfesurynnau polar plân (r,θ), heb rymoedd gwrthrych, yw

$$\rho\left(\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta} - \frac{u_\theta^2}{r}\right) = -\frac{\partial p}{\partial r}$$

a

$$\rho\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta} + \frac{u_ru_\theta}{r}\right) = -\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\theta}$$

yn ôl eu trefn.

Rhan A

1. (a) Diffiniwch y rhif Reynolds ar gyfer llif llifydd, gan egluro eich nodiant yn ofalus. [4 marc]

(b) Amcangyfrifwch y rhif Reynolds sy'n gysylltiedig â thonnau dŵr yn symud tuag at lan y môr Aberystwyth yn y gaeaf. Gallwch dybio mai priodweddau ffisegol dŵr môr yw $\rho \approx 10^3 \mathrm{kg/m}^3$ a $\mu \approx 10^{-3}$ Pa s. [3 marc]

(c) Eglurwch os byddai llifydd anludiog yn cynnig model da ar gyfer y llif ai peidio. [2 farc]

2. Ystyriwch y meysydd cyflymder sefydlog dau ddimensiwn canlynol sydd wedi'u rhoi mewn cyfesurynnau Cartesaidd (x, y) neu polar plân (r, θ), gyda λ yn gysonyn positif. Ymhob achos, darganfyddwch hafaliad ar gyfer y llinlwybrau, a brasluniwch nhw ar echelinau Cartesaidd, gan nodi cyfeiriad y llif.

(a) $\underline{u} = \lambda x \underline{e}_x - \lambda y \underline{e}_y$, [6 marc]

(b) $\underline{u} = \lambda r \underline{e}_\theta$. [6 marc]

3. (a) Rhowch fynegiad ar gyfer deilliad darfudol $\dfrac{\mathrm{D}\underline{u}}{\mathrm{D}t}$ y maes fector $\underline{u}$. [3 marc]

(b) Cyfrifwch y deilliad darfudol o'r maes cyflymder

$$\underline{u} = 3xt\underline{e}_x - 3yzt\underline{e}_y + z\underline{e}_z.$$

[6 marc]

4. (a) Cyfrifwch y forteisedd $\underline{\omega}$ o'r llifau llifydd canlynol:

(i) $\underline{u} = x\underline{e}_y$, [3 marc]

(ii) $\underline{u} = \dfrac{a}{r}\underline{e}_r$, [3 marc]

lle mae a yn gysonyn positif.

(b) Nodwch pa rai o'r llifau yma, os oes rhai o gwbl, sy'n anghylchdro. [1 marc]

. . . mae'r cwestiynau'n parhau

5. Darganfyddwch os yw'r llifau canlynol yn addas ar gyfer llifyddion anghywasg ai peidio:

(a) $\underline{u} = x\underline{e}_x - y\underline{e}_y$, [3 marc]

(b) $\underline{u} = \dfrac{a}{r}\underline{e}_r$, [3 marc]

lle mae a yn gysonyn positif.

6. (a) Diffiniwch beth mae'n ei olygu i faes cyflymder $\underline{u} = u\underline{e}_x + v\underline{e}_y$ gael pwynt marweidd-dra. [2 farc]

(b) Darganfyddwch leoliad y pwynt(iau) marweidd-dra mewn llif gyda maes cyflymder $\underline{u} = ay\underline{e}_x + (x-a)\underline{e}_y - z\underline{e}_z$, lle mae a yn gysonyn positif. [4 marc]

7. (a) Ysgrifennwch hafaliad Bernoulli ar gyfer llifydd gyda gwasgedd p, dwysedd ρ a chyflymder $\underline{u}$ o dan rym gwrthrych â photensial χ, a nodwch yr amodau lle mae'n dal. [7 marc]

(b) Mae petrol yn llifo o dap â diamedr o 1cm, trwy bibell, ac allan o ffroenell â diamedr o 5mm. Gellir tybio fod y petrol yn anghywasg. Os yw'r petrol yn gadael y tap â buanedd o $u_{tap} = 1$ m/s, ar pa fuanedd mae'n llifo allan o'r ffroenell? [3 marc]

(c) Os yw'r bibell yn disgyn o hm dros ei hyd, beth yw'r gwahaniaeth yn y gwasgedd yn y petrol rhwng y tap a'r ffroenell yn nhermau h a dwysedd ρ y petrol? Gallwch gymryd mai'r cyflymiad o ganlyniad i ddisgyrchiant yw $g = 10\mathrm{m/s}^2$. [3 marc]

8. Ystyriwch y llif $\underline{u} = 2xy\underline{e}_x + (x^2 - y^2)\underline{e}_y$.

(a) Cyfrifwch y potensial cyflymder ϕ ar gyfer y llif. [3 marc]

(b) Cyfrifwch y ffwythiant llif ψ ar gyfer y llif. [3 marc]

(c) Dangoswch fod y potensial cyflymder rydych wedi'i ddarganfod yn harmonig, hynny yw ei fod yn bodloni hafaliad Laplace. [2 farc]

. . . mae'r cwestiynau'n parhau

Rhan B

9. Ystyriwch y maes cyflymder ansefydlog dau ddimensiwn $\underline{u} = t\underline{e}_x + \dfrac{3}{y}\underline{e}_y$, lle mae t yn dynodi amser.

(a) Rhowch hafaliad $y(x)$ ar gyfer y llilin trwy'r pwynt (x_0, y_0). [5 marc]

(b) Dangoswch fod gan y llinlwybr trwy'r pwynt (x_0, y_0) yr hafaliad

$$72(x - x_0) = \left(y^2 - y_0^2\right)^2.$$

[5 marc]

10. Ystyriwch y broblem gwerth ffin ganlynol ar gyfer potensial cyflymder ϕ ar gyfer llif llifydd dau ddimensiwn:

$$\nabla^2\phi = 0 \text{ ar gyfer } r > a; \quad \left.\frac{\partial\phi}{\partial r}\right|_{r=a} = 0; \quad \lim_{r\to\infty}\nabla\phi = U\underline{e}_x,$$

lle mae U ac a yn gysonion positif.

(a) Disgrifiwch y llif. [2 farc]

(b) Dangoswch y gellir ysgrifennu'r amod ffin pell i ffwrdd fel $\phi \to Ur\cos\theta$ wrth i $r \to \infty$. [2 farc]

(c) Darganfyddwch ddatrysiad gwahanadwy o hafaliad Laplace mewn cyfesurynnau polar plân (r, θ), gweithredwch y ddau amod ffin, ac felly darganfyddwch ddatrysiad ar gyfer ϕ. [11 marc]

11. Mae llifydd yn llifo â maes cyflymder $\underline{u} = (x^2 - y^2)\underline{e}_x - 2xy\underline{e}_y$. Os mai'r gwasgedd yn y llifydd yn y tarddiad yw p_0, darganfyddwch sut mae'r gwasgedd yn amrywio trwy'r llifydd, os nad oes yna rymoedd gwrthrych yn weithredol. [11 marc]

12. Cyfrifwch y deilliad darfudol o'r maes cyflymder

$$\underline{u} = \cos\theta\underline{e}_r + 2r^2\theta\underline{e}_\theta + rz\underline{e}_z,$$

wedi'i ysgrifennu mewn cyfesurynnau polar silindraidd. [4 marc]

. . . mae'r cwestiynau'n parhau

13. Mae llifydd anghywasg homogenaidd yn ymestyn tuag at anfeidredd lle mae'r gwasgedd yn sero. Yn y llifydd, mae swigen sfferig o nwy lle mae'r gwasgedd p (yn gyson trwy'r swigen ac) mewn cyfrannedd gwrthdro â chyfaint y swigen i'r pŵer $4/3$. Mae'r llifydd yn ddisymud i ddechrau, gyda radiws y swigen yn hafal i a a'r gwasgedd yn y swigen yn hafal i p_0.

Gadewch i $R(t)$ ddynodi radiws y swigen, sy'n bodloni

$$\frac{R^2\ddot{R}}{r} + \frac{2R\dot{R}^2}{r} - \frac{R^4\dot{R}^2}{2r^4} = \frac{p}{\rho},$$

lle mae p a ρ yn dynodi gwasgedd a dwysedd yr hylif yn ôl eu trefn, a r yw'r safle rheiddiol yn yr hylif y tu allan i'r swigen.

(a) Dangoswch fod y gwasgedd p yn y swigen yn bodloni

$$p = p_0\left(\frac{a}{R}\right)^4.$$

[4 marc]

(b) Defnyddiwch yr unfathiant

$$2R^2\left(R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}R}\left(R^3\dot{R}^2\right),$$

er mwyn dangos fod twf y swigen yn y mudiant dilynol yn bodloni'r hafaliad

$$\rho\dot{R}^2 = 2p_0\left(\frac{a^3}{R^3} - \frac{a^4}{R^4}\right).$$

[6 marc]

Diwedd y papur arholiad