

MATHEMATEG BELLACH

Amser a ganiateir: 1 awr 30 munud

- Dylid ysgrifennu'ch holl atebion (gan gynnwys unrhyw ddiagramau, graffiau neu frasluniau) ar bapur, a'u sganio mewn i **un** ffeil PDF. Nid oes angen papur graff.
- Atebwch **bob** cwestiwn yn Rhan A a **dau** gwestiwn o Ran B.
- Caniateir i ymgeiswyr ddefnyddio cyfrifiannellau, cyhyd â'u bod yn cydymffurfio gyda gofynion byrddau arholi safon uwch. Rhaid rhoi'r gyfrifiannell i unrhyw oruchwylwyr yn yr arholiadau ar eu cais ac mae ganddynt yr awdurdod i atal ymgeiswyr rhag defnyddio unrhyw gyfrifiannellau y maent yn amau nad ydynt yn bodloni'r amodau hyn.
- Nid oes angen tablau ystadegol.

Gwybodaeth

- Cynrychiolir cylchdroeon ac adlewyrchiadau 2-D gan fatricsau fel yr isod.

Cylchdro gwrthglocwedd trwy ongl ϕ o amgylch y tarddbwynt : $\begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}$

Adlewyrchiad yn y llinell $y = (\tan \phi)x$: $\begin{pmatrix} \cos 2\phi & \sin 2\phi \\ \sin 2\phi & -\cos 2\phi \end{pmatrix}$

Rhan A

1. Symleiddiwch y mynegiadau isod mor bell ag sy'n bosib, gan ddangos eich cyfrifiadau.

(a) $\frac{2}{i} \frac{2i+3}{1-i} + i$ [3 marc]

(b) $(3\mathbf{i} + 4\mathbf{k}) \cdot (-\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + \mathbf{k})$ [2 farc]

(c) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ [5 marc]

2. Mae'r rhif cymhlyg $z = x + iy$ sy'n bodloni $3|z - 1 + i| = 2|z + i|$ yn cael ei gynrychioli gan y pwynt $P(x, y)$ mewn diagram Argand. Dangoswch fod locws P yn gylch, a darganfyddwch ei radiws a'i ganol. [8 marc] n

3. Ystyriwch yr hafaliad ciwb $2x^3 - 3x^2 + 6x + 65 = 0$.

(a) Dangoswch fod $2 - 3i$ yn wreiddyn yr hafaliad. [3 marc]

(b) Darganfyddwch y ddau wreiddyn arall, gan egluro eich dull. [4 marc]

4. (a) (i) Differwch $x^{-1} \sin x$ ac $x^{-1} \cos x$ mewn perthynas ag x . (ii) Trwy hyn cyfrifwch $\int_{\pi/2}^{\pi} \left(\frac{3+x}{x^2} \cos x - \frac{1-3x}{x^2} \sin x \right) dx$, gan ddangos eich holl gyfrifiadau. [7 marc]

(b) Dangoswch fod $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} + C$ (pan mae $-1 < x < 1$). [4 marc]

5. Defnyddiwch anwythiad mathemategol i brofi bod

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^n + 1 & 3^n - 1 \\ 3^n - 1 & 3^n + 1 \end{pmatrix},$$

ar gyfer pob cyfanrif positif n . [7 marc]

6. Mae'r plân Π yn cynnwys y tarddbwynt ac mae'n perpendicwlar i'r fector $\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$. Mae'r llinell L yn pasio trwy'r pwyntiau $A(1, 1, 1)$ a $B(1, -1, -1)$.

(a) Ysgrifennwch hafaliad y plân Π ar ffurf Cartesaidd. [1 marc]

(b) Dangoswch fod y pwynt $(1, 1, -1)$ yn gorwedd yn Π . [1 marc]

(c) Darganfyddwch (i) y fector \mathbf{AB} , a (ii) hafaliad fector y llinell L . [3 marc]

(d) Darganfyddwch gyfesurynnau pwynt croestoriad L a Π . [3 marc]

7. Ystyriwch y trawsffurfiadau yn y plân isod:

R_1 yw'r cylchdro gwrthlocwedd trwy $\frac{\pi}{4}$ radian o amgylch y tarddbwynt.

R_2 yw'r adlewyrchiad yn y llinell $y + \sqrt{3}x = 0$.

(a) Darganfyddwch y matricesau- 2×2 sy'n cynrychioli R_1 ac R_2 . Symleiddiwch eich ateb trwy ddefnyddio union werthoedd sinau a chosinâu. [5 marc]

(b) Trawsffurfiad T yw'r canlyniad o weithredu R_1 yna R_2 ac yna gwrthdro R_1 . Darganfyddwch y matrices sy'n cynrychioli T . [4 marc]

Rhan B

8. Ystyriwch y ffwythiant $f(x) = 2a(3 - 2x)x^2 + (3x - 4)x^3$, lle mae a yn gysonyn fel bod $0 < a < 1$.

(a) Dangoswch mai $(0, 0)$, $(a, a^3(2 - a))$ a $(1, 2a - 1)$ yw (holl) bwyntiau sefydlog y gromlin $y = f(x)$. [4 marc]

(b) Darganfyddwch natur pob un pwynt sefydlog. Sicrhewch eich bod yn nodi ble rydych yn defnyddio'r amod $0 < a < 1$ yn eich datrysiad. [4 marc]

(c) Ysgrifennwch (yn nhermau a) gwerth mwyaf y ffwythiant $f(x)$ yn y cyfwng $0 \leq x \leq 1$. Cyfiawnhewch eich ateb. [2 marc]

(d) Gan dybio $\frac{1}{2} \leq a < 1$, eglurwch pam fod $f(x) \geq 0$ ar gyfer pob $0 \leq x \leq 1$. [1 marc]

(e) Tybiwch nawr bod $0 < a < \frac{1}{2}$. Sawl gwreiddyn sydd gan yr hafaliad $f(x) = 0$ yn y cyfwng $0 \leq x \leq 1$? Cyfiawnhewch eich ateb yn ofalus. [5 marc]

(f) Ystyriwch y gosodiadau A a B isod, lle mae $0 \leq x \leq 1$ a $0 < a < 1$:

A Os $\frac{1}{2} \leq a < 1$ ac $f(x) = 0$, yna $x = 0$.

B Os $0 < x \leq 1$ ac $f(x) = 0$, yna $0 < a < \frac{1}{2}$.

Yn y ddau achos, penderfynwch p'un ai bod y gosodiad yn wir neu'n anwir. Cyfiawnhewch eich ateb trwy roi prawf (os yw'n wir), neu wrthenghraifft (os yw'n anwir). [4 marc]

9. Mae pêl sydd â màs m kg yn cael ei ollwng o do adeilad tal (gyda chyflymder cychwynnol sero). Wrth i'r bêl ddisgyn, mae'r aer yn gweithredu grym gwrtheddol arno gyda maint kv^2 N, lle mae k yn gysonyn a v ms⁻¹ yw cyflymder y bêl ar amser t .

(a) Mewn diagram, dangoswch gyfeiriad y mudiant a phob grym sy'n gweithredu ar y bêl. [2 marc]

(b) Ysgrifennwch hafaliad mudiant y bêl yn nhermau y cyflymder v , y cyflymiad a , a'r cysonion g, m, k . [2 marc]

(c) Eglurwch yn fyr pam fod y cyflymiad yn lleihau wrth i'r bêl ddisgyn. [2 marc]

(d) Mae'r terfan o sero cyflymiad yn diffino'r *buanedd terfynol* v_T . Gan ddefnyddio'r hafaliad mudiant, dangoswch fod $v_T = \sqrt{mg/k}$. [2 marc]

(e) Dangoswch gellir ysgrifennu'r hafliad mudiant fel

$$\frac{dv}{dt} = g \left(1 - (v/v_T)^2 \right).$$

[3 marc]

(f) Gan ddefnyddio'r fformiwla integrol yn nghwestiwn 4 (b), datrysych yr hafaliad differol yn (e) er mwyn darganfod mynegiad ar gyfer $v = v(t)$ fel ffwythiant o amser t . [7 marc]

(g) Gan ddefnyddio'r mynegiad darganfyddoch yn (f), darganfyddwch derfan $v(t)$ wrth i $t \rightarrow \infty$, a dehonglwch y canlyniad yn y cyd-destun hwn. [2 marc]

10. Mae gan hapnewidyn, X , y dosraniad tebygolrwydd isod:

x	$P(X = x)$
0	p
1	$2p$
2	q
3	$2q$
4	0.15
5	0.1

Yn ychwanegol i hyn mae $E(X) = 2.5$.

(a) Ysgrifennwch ddau hafaliad mae'n rhaid i p a q eu bodloni, a thrwy hyn darganfyddwch werthoedd p a q . [6 marc]

(b) Darganfyddwch $\text{Var}(X)$. [3 marc]

Mae Adrian a Jemima yn chwarae gêm. Mae gwerth, X , yn cael ei ddewis ar hap o'r dosraniad uchod. Rhoir sgôr Adrian gan yr hapnewidyn $A = X$, a rhoir sgôr Jemima gan yr hapnewidyn $J = 5 - X$.

(c) Darganfyddwch $E(J)$. [2 farc]

Mae Adrian a Jemima yn cyfrifo eu sgoriau a phwy bynnag sydd â'r sgôr uchaf yw'r enillydd.

(d) Beth yw'r tebygolrwydd bod Adrian yn ennill? [3 marc]

(e) Beth wy'r tebygolrwydd bod Jemima yn ennill? [1 marc]

(f) Mae trydydd chwaraewr, Caroline, yn ymuno â'r gêm a'i sgôr hi yw'r hapnewidyn $C = X^2 + 1$.

(i) Eglurwch yn glir pam fydd Caroline yn curo Adrian bob tro. [2 farc]

(ii) Cyfrifwch y tebygolrwydd bydd Jemima yn curo Caroline. [3 marc]