

MATHEMATEG BELLACH

Amser a ganiateir: 1 awr 30 munud

- Dylid ysgrifennu'ch holl atebion (gan gynnwys unrhyw ddiagramau, graffiau neu frasluniau) ar bapur, a'u sganio mewn i **un** ffeil PDF. Nid oes angen papur graff.
- Atebwch **bob** cwestiwn yn Rhan A a **dau** gwestiwn o Ran B.
- Caniateir i ymgeiswyr ddefnyddio cyfrifiannellau, cyhyd â'u bod yn cydymffurfio gyda gofynion byrddau arholi safon uwch. Rhaid rhoi'r gyfrifiannell i unrhyw oruchwylwyr yn yr arholiadau ar eu cais ac mae ganddynt yr awdurdod i atal ymgeiswyr rhag defnyddio unrhyw gyfrifiannellau y maent yn amau nad ydynt yn bodloni'r amodau hyn.

Gwybodaeth a fformiwlâu perthnasol

- Ffurf begynlinol rhif cymhlyg z yw $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ lle mae $r > 0$ a $-\pi \leq \theta \leq \pi$. Yna mae $z^n = r^n(\cos(n\theta) + i \sin(n\theta))$ ar gyfer unrhyw gyfanrif positif n .
- Darperir tablau ystadegol. Noder bod y tablau yn cyfeirio at gynffonnau **llaw dde'r** dosraniadau, hynny yw, tebygolrwyddau ar ffurf $p = \mathbb{P}(X \geq x)$ lle hapnewidyn yw X a phwynt canran **uchaf** i'w ddosraniad yw x .
- Mae fformiwlâu sy'n berthnasol i ddosraniadau safonol (e.e. ar gyfer tebygolrwydd, cymedr ac amrywiant) ar dudalen gefn y tablau ystadegol.

Rhan A

1. Symleiddiwch y mynegiadau isod cyn belled ag y bo modd, gan ddangos eich gwaith cyfrifo.

(a) $\frac{1}{2-i} + \frac{3}{1-2i} - \frac{7}{5}i$; [4 marc]

(b) $|5\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 9\mathbf{k}| + |2(-\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}) - (3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 7\mathbf{k})|$; [5 marc]

(c) $\mathbf{A} + (1 - a^2)(\mathbf{I} + \mathbf{A})^{-1}$, os yw $\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}$, ac $a^2 \neq 1$. [6 marc]

2. Datrysych yr hafaliad $(1 + 3i)\bar{z} - (2 + i)z + 13 = 16i$, ar gyfer y rhif cymhlyg z . (Yma, $\bar{z}$ yw cyfiau cymhlyg z .) [8 marc]

3. Darganfyddwch holl werthoedd a fel nad oes gan y matrices $\begin{pmatrix} 2 & 3a \\ 3a & a \end{pmatrix}$ wrthdro [4 marc]

4. Ystyriwch y rhif cymhlyg $z = 1 + i\sqrt{3}$.

(a) Mynegwch y pedwar rhif z , $\bar{z}$, $1/z$, ac $1/\bar{z}$ yn y ffurf begynlinol (fel y nodir ar y dudalen flaen). [9 marc]

(b) Cynrychiolwch y pedwar rhif yn (a) fel pwyntiau mewn diagram Argand, gan nodi'n glir yr onglau a'r llinellau rheiddiol perthnasol. [4 marc]

(c) Mynegwch $(2/z)^{40}$ ar ffurf begynlinol. [4 marc]

5. Cynrychiolir y rhif cymhlyg z sy'n bodloni $|4i + z| = |\bar{z} - 9 + 8i|$ gan y pwynt $P(x, y)$ mewn diagram Argand. Darganfyddwch hafaliad locws P yn nhermau x ac y , a dehonglwch ef yn geometregol. [6 marc]

6. Ystyriwch y polynomial $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + c$, lle mae c yn gysonyn.

(a) Pennwch werth c fel bod $f(1 + 3i) = 0$. [4 marc]

(b) Ar gyfer gwerth c a ddarganfyddir yn (a), darganfyddwch holl wreiddiau yr hafaliad $f(x) = 0$, gan egluro eich dull ar gyfer pob gwreiddyn. [6 marc]

Rhan B

7. Gadawer i a fod yn unrhyw rif real, a diffinnir y matrices

$$\mathbf{A} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4a + 1 & 2(a - 1) \\ 2(a - 1) & a + 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Datrysych yr hafaliad $\det(\mathbf{A} - x\mathbf{I}) = 0$ ar gyfer x . (Yma $\mathbf{I}$ yw'r matrices unfathiant.) Sylwch y gall eich datrysiadau ddibynnu ar a . [7 marc]

(b) Gadawer i

$$\mathbf{P} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(i) Dangoswch fod $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$, gan gynnwys digon o waith cyfrifo i ddangos eich bod wedi gwirio'r honiand yn llawn. [2 farc]

(ii) Darganfyddwch fector $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ fel bod $\mathbf{P} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. [3 marc]

(c) Gadawer i $\mathbf{P}$ fod fel yn (b). Profwch drwy anwythiad mathemategol bod

$$\mathbf{A}^n = (a^n - 1)\mathbf{P} + \mathbf{I},$$

ar gyfer pob cyfanrif positif n . [8 marc]

8. Ar yr amser t eiliad, fector cyflymder, $\mathbf{v}$ (metr/eiliad), gwrthrych màs 6 kg yw

$$\mathbf{v} = 2 \sin(5t)\mathbf{i} + 2 \cos(5t)\mathbf{j} - (1 + t)^{-2}\mathbf{k},$$

lle mae'r ongl $5t$ mewn radianau. Yn gychwynnol (ar amser $t = 0$) mae'r gwrthrych yn safle $\mathbf{x} = 2\mathbf{k}$.

(a) Darganfyddwch mynegiadau ar gyfer fectorau safle a chyflymiad $\mathbf{x}$ (m) ac $\mathbf{a}$ (ms^{-2}) y gwrthrych ar amser t eiliad. [6 marc]

(b) Darganfyddwch yr amser mae'r gwrthrych yn mynd trwy'r plân $z = \frac{3}{2}$, a nodwch gyfesurynnau'r pwynt croesi (i 2 le degol). [4 marc]

(c) Cyfrifwch egni cinetig y gwrthrych ar amser t eiliad. [4 marc]

(d) Cyfrifwch (i 2 le degol) y gwaith a wneir gan y grym sy'n gweithredu ar y gwrthrych yn ystod yr eiliad gyntaf (h.y. o $t = 0$ i $t = 1$ eiliad). [3 marc]

(e) Disgrifiwch (mewn ychydig eiriau) natur mudiant y gwrthrych ar gyfer gwerthoedd mawr o t , gan gyfiawnhau eich rhesymiad. [3 marc]

9. (a) Rhoddir dosraniad tebygolrwydd hapnewidyn arwahanol, X , gan

x	1	2	3	4
$\mathbb{P}(X = x)$	0.2	0.3	0.4	0.1

- (i) Darganfyddwch $\mathbb{E}(X)$ a $\text{Var}(X)$. [5 marc]
(ii) Os yw $Y = 2X + 3$, darganfyddwch $\mathbb{E}(Y)$ a $\text{Var}(Y)$. [2 farc]
- (b) Mae gan Johann ddiddordeb mewn sefydlu a yw dis yn deg. Mae'n rholio'r dis 120 o weithiau ac yn cael yr amledau canlynol o'r rhifau 1 i 6:

Gwerth	1	2	3	4	5	6
Amledd	18	16	19	25	22	20

Cynhaliwch brawf llwyddiant y ffit χ^2 ar y lefel arwyddocâd 10% gan ddefnyddio'r fformiwla

$$X^2 = \sum_{i=1}^6 \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i},$$

lle o_i yw'r nifer o weithiau arsylwyd bod yr i^{fed} gwerth yn digwydd (ar gyfer $i = 1, 2, \dots, 6$) ac e_i yw'r nifer disgwyliedig o weithiau y mae'r i^{fed} yn digwydd os yw'r dis yn deg. Nodwch eich rhagdybiaethau nwl ac amgen yn ofalus, nodwch ddosraniad X^2 os yw'r rhagdybiaeth nwl yn wir a chyflwynwch eich casgliad gyda chyfiawnhad. [8 marc]

- (c) Mae gan hapnewidyn, X , y dosraniad $\text{Bin}(10, 0.4)$. Darganfyddwch y tebygolrwyddau canlynol:
- (i) $\mathbb{P}(X = 5)$, [2 farc]
(ii) $\mathbb{P}(3 \leq X < 6)$. [3 marc]